

Kolokwium nr 2: poniedziałek 23.10.2017, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–80.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

2. Liczby wymierne i niewymierne.

Przypomnij sobie ze szkoły: Rozwiązywanie równań, logarytmy.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na Analizie Matematycznej 1P.

41. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

42. Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego

43. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$ 44. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$ 45. $(0,(037))^{0,(3)}$

46. Zapisać ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{11}$

Uprościć wyrażenia

47. $4^{2+\log_2 7}$ 48. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$ 49. $\log_6 2 + \log_{36} 9$

50. $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$ dla liczb naturalnych m i n większych od 1.

51. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ 52. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

Rozwiązać nierówności:

53. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$ 54. $\sqrt{x^2+27} > 2x$

55. $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2017} + 2017$ 56. $||| ||| |x|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$

57. $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$ 58. $|x^2-25| < 24$

59. $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ 60. $(x+5)^{2017} + (x+5)^7 < (3x+1)^{2017} + (3x+1)^7$

61. $(x^2+1)^{x+2} < (x^2+1)^{x^2}$ 62. $(x^2+x+1)^{3x} \geq (x^2+x+1)^{x+1}$

63. $\log_{2x}(x^2+1) \leq \log_{2x}(x^2+3x)$ 64. $\log_2 x + \log_x 4 < 3$ 65. $\log_x 3 \leq 2$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 16.10.2017 (grupy 2–5).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

66. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

67. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że $\log_m n = 13/7$?

68. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

69. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{\quad}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

70. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

71. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

72. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

OSZUSTWO 73.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2} \\ w+\sqrt{2} &= \sqrt{3-\sqrt{8}} \\ w^2+2\sqrt{2}w+2 &= 3-2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1) &= 0 \end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

74. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

75. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

76. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

77. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

78. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$. Nie używać kalkulatora. Wolno wykonywać bezpośrednie obliczenia na liczbach całkowitych dodatnich mniejszych od 300.

79. Podać przykład takich liczb niewymiernych dodatnich a , b , c , d , e , f , że liczby $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+f$, $e+f+a$, $f+a+b$ są wymierne.

80. Dane są takie liczby rzeczywiste a , b , c , d , że liczby $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$, $d+a+b$ są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.