Kolokwium nr 6: poniedziałek 27.11.2017, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–252.

Zadanie z konwersatorium.

211. a) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.
b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

5. Kresy zbiorów.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 22,27.11.2017 (grupy 2–5).

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru Z oraz określ, czy kresy należą do zbioru Z. **Nie wszystkie zadania będą omówione szczegółowo na ćwiczeniach – studenci powinni umieć wskazać zadania, które sprawiły największą trudność.**

212. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-7}:n\in\mathbb{N}\right\}$

213. $Z=\left\{x^n: x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$

214. $Z=\left\{\sqrt{n^2+3}-n: n\in\mathbb{N}\right\}$

215. $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n: n\in\mathbb{N}\}$

216. $Z=\left\{\frac{n}{3n+7}:n\in\mathbb{N}\right\}$

217. $Z=\left\{\frac{n}{3n-7}:n\in\mathbb{N}\right\}$

218. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

219. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1}: -5\leqslant x<3\right\}$

220. $Z=\left\{\frac{1}{x^2+2}:x\in\mathbb{R}\right\}$

221. $Z=\left\{\frac{x^2+1}{x^2+2}:x\in\mathbb{R}\right\}$

222. $Z=\left\{x^2+4x+4: x\in(-6,1)\right\}$

223. $Z=\left\{x^2+4y+4: x,y\in(-6,1)\right\}$

224. $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+4}:n\in\mathbb{N}\right\}$

225. $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+6}:n\in\mathbb{N}\right\}$

226. $Z=\left\{x^2 : x\in(-3,2)\right\}$

227. $Z=\left\{x^3 : x\in(-3,2)\right\}$

228. $Z=\left\{\frac{1}{5n-13} : n\in\mathbb{N}\right\}$

229. $Z=\left\{\frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

230. $Z=\left\{n^2-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

231. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

232. $Z=\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

233. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2m^2<3n^2\right\}$

234. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^m>3^n\right\}$

235. $Z=\left\{7n+\frac{n!+n^{2009}+1}{n!+n^{2009}+4} : n\in\mathbb{N}\right\}$

236. $Z=\left\{x^2 : x\in(-4,9)\right\}$

237. $Z=\left\{\frac{n}{2n+3} : n\in\mathbb{N}\right\}$

238. $Z=\left\{\binom{2008}{n} : n\in\mathbb{N}\wedge n\leqslant 2008\right\}$

239. $Z=\left\{\frac{n}{n+m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

240. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right)^2 : n\in\mathbb{N}\right\}$

241. $Z=\left\{\sqrt{n^2+2n}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

242. $Z=\left\{\sqrt[n]{3}-\sqrt[m]{2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

243. $Z=\left\{\frac{7}{n}-3m : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

244. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

245. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

246. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

247. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

248. $Z=\left\{\frac{5m-2n}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

249. $Z=\left\{\frac{m}{n+7} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

250. $Z=\left\{x^2 : x\in(-2,1)\right\}$

251. $Z=\left\{x^3 : x\in(-2,1)\right\}$

252. $Z=\left\{3x^2+y^3 : x,y\in(-2,1)\right\}$

253. $Z=\left\{\sqrt{n^2+n}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

254. $Z=\left\{\sqrt{n^2+n+1}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

255. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,8]\}$

256. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,16]\}$

257. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,32]\}$

258. $Z=\left\{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{2m-3} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

259. $Z=\{\log_2(n+7)-\log_2 n : n\in\mathbb{N}\}$

260. $Z=\left\{\frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

261. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

262. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-22} : n\in\mathbb{N}\right\}$

263. $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

264. $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$

265. $Z=\{x-2y : x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

266. $Z=\{|x-y| : x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

267. $Z=\left\{\frac{1}{7n-30} : n\in\mathbb{N}\right\}$

268. $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^2} : n\in\mathbb{N}\right\}$

269. $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^3} : n\in\mathbb{N}\right\}$

270. $Z=\left\{\frac{1}{7m-30}+\frac{1}{(7n-30)^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

271. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

272. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

273. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^2\cdot n^{6}\leqslant m^{6}\leqslant 2^3\cdot n^{6}\right\}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.
Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać w miarę wolnego czasu na ćwiczeniach lub na Analizie Matematycznej 1P.
Odpowiedzi do zadań zawiera lista 5R.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

274. $A=\left\{\frac{1}{n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

275. $B=\left\{\frac{2n+5}{n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

276. $C=\left\{\frac{2n+3}{n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

277. $D=\left\{\frac{m+n}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

278. $E=\left\{\frac{8m-3n}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

279. $F=\left\{\frac{m+2n+3}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

280. $G=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

281. $H=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

282. $I=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^n\leqslant 3^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

283. $J=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^n\leqslant 5^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

284. $A=\left\{x^2 : x\in(-3,1)\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

285. $B=\left\{x^3 : x\in(-3,1)\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

286. $C=\left\{x^4 : x\in(-3,1)\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

287. $D=\left\{x^2-2x+1 : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

288. $E=\left\{x^2-4x+4 : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

289. $F=\left\{x^2-6x+9 : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

290. $G=\left\{x^2-2x : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

291. $H=\left\{x^2-4x : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

292. $I=\left\{x^2-6x : x\in(-1,4)\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

293. $A=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant m^2\leqslant 64n^2\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

294. $B=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^3\leqslant m^3\leqslant 64n^3\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

295. $C=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^4\leqslant m^4\leqslant 64n^4\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

296. $D=\left\{\sqrt{n^4+n^2}-n^2:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

297. $E=\left\{\sqrt[4]{n^4+n^3}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

298. $F=\left\{(\log_2 x)^2:\, x\in\left(\frac{1}{8},2\right)\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

299. $G=\left\{(\log_3 x)^3:\, x\in\left(\frac{1}{9},3\right)\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

300. $H=\left\{(\log_4 x)^4:\, x\in\left(\frac{1}{16},4\right)\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

301. $I=\left\{\log_x 8:\, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

302. $J=\left\{\log_x 8:\, x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right)\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

303. $K=\{\log_x 8:\, x\in(1,4]\}$ $\inf K=$ .... $\sup K=$ ....

304. $L=\left\{\log_x 8:\, x\in\left[\frac{1}{16},1\right)\right\}$ $\inf L=$ .... $\sup L=$ ....

305. $A=\left\{(x-2)^2:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

306. $B=\left\{(x-2)^3:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

307. $C=\left\{(x-2)^4:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

308. $D=\left\{(x-2)^5:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

309. $E=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4n^2\leqslant 8m^2\leqslant 16n^2\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

310. $F=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4n^2\leqslant 9m^2\leqslant 16n^2\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

311. $G=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant 9m^2\leqslant 27n^2\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

312. $H=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^n\leqslant 8^m\leqslant 16^n\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

313. $I=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^n\leqslant 9^m\leqslant 16^n\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

314. $J=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

315. $A=\left\{\frac{1}{3^n-10}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

316. $B=\left\{\frac{1}{3^n-20}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

317. $C=\left\{\frac{1}{3^n-26}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

318. $D=\left\{\frac{1}{5^n-26}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

319. $E=\left\{\left(\sqrt{26}-4\right)^{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

320. $F=\left\{\left(\sqrt{26}-5\right)^{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

321. $G=\left\{\left(\sqrt{26}-6\right)^{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

322. $H=\left\{2^{x^2}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

323. $I=\left\{2^{x^3}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

324. $J=\left\{2^{x^4}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}|a_n-1|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

325. $\sup\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

326. $\inf\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

327. $\sup\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

328. $\inf\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

329. $\sup\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

330. $\inf\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

331. $\sup\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

332. $\inf\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

333. $\sup\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

334. $\inf\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left|a_n-\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

335. $\sup\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

336. $\inf\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

337. $\sup\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

338. $\inf\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

339. $\sup\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

340. $\inf\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

341. $\sup\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

342. $\inf\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

343. $\sup\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

344. $\inf\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....