

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona. Nierówność między średnimi.

Poziom LUX

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 5,9,12.10.2017 (grupa 1 lux).

Należy próbować rozwiązać zadania przed ćwiczeniami.

501. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

502. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

503. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

504. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

505. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześcian można podzielić na n sześciątów. Spróbować zastąpić liczbę 200 mniejszą liczbą.

506. Jak wygląda analogiczne zadanie w przestrzeni czterowymiarowej?

507. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A , B , C , D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania

$$A \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+B}} \leq \binom{2n}{n} \leq C \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+D}}.$$

508. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

509. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots = F_{n+1},$$

gdzie F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

510. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest implikacja $x^7 + 55x^5 + 333x^3 > 1111 \Rightarrow x^2 < 10$.

511. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50} \cdot (n+25C)^{24} > (n+50)^{49} \cdot (n+24C)^{25}.$$

512. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50} \cdot (n+25C)^{24} < (n+50)^{49} \cdot (n+24C)^{25}.$$

513. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n^{12} \cdot (n+1)^{12} > (n-1)^{11} \cdot (n+2)^{11} \cdot (n^2 + n + 22).$$

514. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(10)$,
- b) prawdziwe jest $T(11)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

515. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
- f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

516. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

517. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) fałszywe jest $T(3)$,
- b) fałszywe jest $T(11)$,
- c) prawdziwe jest $T(9)$,
- d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

518. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-3)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(37)$
- b) $T(38)$
- c) $T(10)$
- d) $T(11)$

519. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Wówczas:

- a) $T(70)$ b) $T(81)$ c) $T(92)$ d) $T(101)$
 e) $T(140)$ f) $T(75) \Rightarrow T(105)$ g) $T(161) \Rightarrow T(160)$
 h) $T(51) \Rightarrow T(60)$ i) $T(10) \Rightarrow T(11)$ j) $T(10) \Rightarrow T(12)$

520. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N** o znaczeniu jak wyżej:

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że:

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 7$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-7)$.

Wówczas:

- a) $T(71)$ b) $T(72)$ c) $T(73)$
 d) $T(74)$ e) $T(75)$ f) $T(76)$
 g) $T(77)$ h) $T(771) \Rightarrow T(772)$
 i) $T(772) \Rightarrow T(773)$ j) $T(773) \Rightarrow T(774)$
 k) $T(773) \Rightarrow T(75)$ l) $T(73) \Rightarrow T(775)$
 m) $T(70) \Rightarrow T(777)$ n) $T(770) \Rightarrow T(77)$

521. Przy każdym z poniższych 26 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N** o znaczeniu jak wyżej:

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n^3)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$,
- implikacja $T(666) \Rightarrow T(55)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

- a) $T(1)$ b) $T(2016)$ c) $T(2)$ d) $T(2017)$ e) $T(3)$
 f) $T(2018)$ g) $T(4)$ h) $T(2019)$ i) $T(5)$ j) $T(2020)$
 k) $T(1111) \Rightarrow T(222)$ l) $T(1111) \Rightarrow T(3333)$ m) $T(1111) \Rightarrow T(444)$
 n) $T(1111) \Rightarrow T(5555)$ o) $T(2222) \Rightarrow T(111)$ p) $T(2222) \Rightarrow T(3333)$
 q) $T(2222) \Rightarrow T(444)$ r) $T(2222) \Rightarrow T(8888)$ s) $T(3333) \Rightarrow T(222)$
 t) $T(3333) \Rightarrow T(5555)$ u) $T(4444) \Rightarrow T(111)$ v) $T(4444) \Rightarrow T(8888)$
 w) $T(5555) \Rightarrow T(111)$ x) $T(5555) \Rightarrow T(7777)$
 y) $T(5555) \Rightarrow T(333)$ z) $T(5555) \Rightarrow T(9999)$