

2. Liczby wymierne i niewymierne.**Poziom LUX**

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 16,19.10.2017 (grupa 1 *lux*).

Należy próbować rozwiązać zadania przed ćwiczeniami.

522. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

523. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

524. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q > 1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n , gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n < q$ oraz $m/n > q$ używając tylko liczb m, n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25 < 27$, $125 < 128$).

525. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e , że liczby

$$a+b+c, \quad b+c+d, \quad c+d+e, \quad d+e+a, \quad e+a+b$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

526. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f, g , że liczby

$$a+b+c+d+e, \quad b+c+d+e+f, \quad c+d+e+f+g, \quad d+e+f+g+a, \\ e+f+g+a+b, \quad f+g+a+b+c, \quad g+a+b+c+d$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

527. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

528. Liczba wymierna $q > 1$ spełnia równość $3^q = q^3$. Udowodnić, że $q = 3$.

Jeśli nie potrafisz rozwiązać tego zadania, pomyśl nad rozwiązaniem częściowym polegającym na udowodnieniu jednego z następujących twierdzeń:

- Liczba wymierna $q > 1$ spełniająca równość $3^q = q^3$ musi być całkowita.
- Liczba całkowita $q > 1$ spełniająca równość $3^q = q^3$ musi być równa 3.

Uwaga: Istnieje liczba niewymierna $q \approx 2,47805268$ spełniająca równanie $3^q = q^3$.

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

529. $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,

530. $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

531. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

532. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

533. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

534. x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,

535. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

536. $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,

537. $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,

538. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

539. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,

540. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

541. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,

542. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

543. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

544. $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

545. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

546. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

547. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

548. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.