

Kolokwium nr 52: czwartek 9.11.2017, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–156, 501-583.

3. Szacowanie liczb i wyrażeń (c.d).

Poziom LUX

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6.11.2017 (grupa 1 *lux*).

Należy próbować rozwiązać zadania przed ćwiczeniami.

Oszacować podane wyrażenia, gdzie $n \in \mathbb{N}$, od góry i od dołu przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

$$573. \frac{2^n + 10n^2}{2^n + n^4} \quad 574. \frac{4^n + n^4}{2^n + n^2} \quad 575. \frac{n!}{n! + 10^n} \quad 576. \frac{(n+2)!}{n! + 10^n}$$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g - C/n < W(n) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

$$577. \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \quad 578. \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n$$

$$579. \text{Udowodnić nierówności } 1 - \frac{4}{n^{3/4}} < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{4}{n^{3/4}}.$$

$$580. \text{Udowodnić nierówności } 1 - \frac{1000}{n^{999/1000}} < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1000}{n^{999/1000}}.$$

Przypomnienie fragmentu rachunków z wykładu:

Niech $c_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wówczas

$$n = (1 + c_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_n^k,$$

skąd

$$\binom{n}{k} c_n^k < n$$

dla $n \geq k$.

581. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący.

582. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

jest malejący.

583. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leq 32C.$$