

Kolokwium nr 53: czwartek 16.11.2017, godz. 14:15-15:00, materiał zad. 1–181, 501-595.

4. Ciągi liczbowe, granica.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 9.11.2017 (do 17:00), 13.11.2017 (grupa 1 lux).

584. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
- d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
- e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- f) $a_{666} < 7777777$,
- g) $a_{1111} > 88$,
- h) $\forall_{n>1729} |a_n - 100| < 1$,
- i) $\forall_{n>345} |a_n - 100| < 17$,
- j) $\forall_{n>5555} |a_n - 99| < 13$,
- k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
- l) $\exists_{n>444} |a_n - 95| < 37$,
- m) $\exists_{n>4444} |a_n - 80| < 37$,
- n) $\exists_{n<444} |a_n - 95| < 37$,
- o) $\exists_{n<4444} |a_n - 80| < 37$,
- p) $\forall_m \exists_{n>m} a_n > 0$,
- q) $\forall_{n>1331} |a_n - 66| > 12$,
- r) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 7$,
- s) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 17$,
- t) $\forall_{m>123} \forall_{n>45678} |a_n - a_m| < 27$,
- u) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 37$,
- v) $\exists_{m<123} \exists_{n<456} |a_n - a_m| < 3$,
- w) $\forall_{m>12345} \forall_{n>67890} |a_n + a_m| < 210$,
- x) $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} |a_n + a_m| < 222$,
- y) $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} |a_n + a_m| > 128$,
- z) $\exists_n a_n < 92$,
- ż) $\exists_n a_n > 91$,
- ź) $\exists_m \exists_{n \neq m} |a_n - a_m| < 10^{-1000000}$.

585. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{\varepsilon \geq 1} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Czy stąd wynika, że

- 585.1** ciąg (a_n) jest zbieżny
585.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny
585.3 ciąg (a_n) jest ograniczony
585.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
585.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
585.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie
585.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne
585.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich
585.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych
585.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni
585.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny
585.12 $\forall_n a_n > 0$
585.13 $\forall_n a_n \geq 0$
585.14 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$
585.15 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0$
585.16 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$
585.17 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0$
585.18 $\exists_n a_n > 0$
585.19 $\exists_n a_n \geq 0$

586. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2015}{6} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

587. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}} \right).$$

588. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2}{n^3} + \frac{4n^2+n}{n^3+1} + \frac{4n^2+2n}{n^3+2} + \frac{4n^2+3n}{n^3+3} + \frac{4n^2+4n}{n^3+4} + \dots + \frac{9n^2-n}{n^3+5n-1} + \frac{9n^2}{n^3+5n} \right).$$

589. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} \right).$$

590. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2+1} + \sqrt{16n^2+1} + \sqrt{25n^2+1} + \sqrt{36n^2+1} + \dots + \sqrt{n^4+1}}{n^k}$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

591. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2} + \sqrt{16+16} + \sqrt{2^8+2^7} + \sqrt{2^{12}+2^{10}} + \sqrt{2^{16}+2^{13}} + \dots + \sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}}{4^n+1}.$$

592. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}} + \frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}} + \frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}} + \dots + \frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}} + \dots + \frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

593. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} \right).$$

594. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n}{4^n+2^n} + \frac{4^n}{4^{n+1}+2^{n+1}} + \frac{4^n}{4^{n+2}+2^{n+2}} + \dots + \frac{4^n}{4^{n+k}+2^{n+k}} + \dots + \frac{4^n}{16^n+4^n} \right).$$

595. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{n^{12}+1}} + \frac{\sqrt{16+8}}{\sqrt{n^{12}+2^5}} + \frac{\sqrt{81+18}}{\sqrt{n^{12}+3^5}} + \dots + \frac{\sqrt{k^4+2k^2}}{\sqrt{n^{12}+k^5}} + \dots + \frac{\sqrt{n^8+2n^4}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.