

Kolokwium nr 54: czwartek 23.11.2017, godz. 14:15, materiał zad. 1–210, 501–645.

5. Kresy zbiorów.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 16.11.2017 (**do 17:00**), 20.11.2017 (grupa 1 *lux*).

596. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

597. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a| : a \in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

598. Podać przykład takich zbiorów A, B , że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

- 599.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon\right)$
- 600.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon\right)$
- 601.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon\right)$
- 602.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2}\right)$
- 603.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n}\right)$
- 604.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g - a) < \frac{1}{n}\right)$
- 605.** $\left(\forall_{a \in A} a < g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon\right)$
- 606.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon\right)$
- 607.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon\right)$
- 608.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
- 609.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
- 610.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon\right)$
- 611.** $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon\right)$

612. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
 613. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
 614. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
 615. $\left(\exists_{a \in A} a^2 \geq 0\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
 616. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru Z oraz określ, czy kresy należą do zbioru Z .

617. $Z = \left\{ \frac{3}{n} - \frac{5}{m^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 618. $Z = \left\{ \frac{mn^2}{m^2 + n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 619. $Z = \{ |x+y| - |x| - |y| : x, y \in \mathbb{R} \}$
 620. $Z = \left\{ \frac{1}{5^n - 3^m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 621. $Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 622. $Z = \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 623. $Z = \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 624. $Z = \left\{ \frac{m+n}{p} : m, n, p \in \mathbb{N} \wedge m^2 > 2p^2 \wedge n^2 > 3p^2 \right\}$
 625. $Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

Twierdzenie 626. Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech $C = \{a - b : a \in A \wedge b \in B\}$. Wtedy $\inf C = \boxed{\inf A - \sup B} \boxed{\sup B - \inf A}$.

Dowód:

Niech $d = \inf A$ i $g = \sup B$. Wtedy z warunku $d = \inf A$ wynika, że

$$(1) \quad \boxed{\forall_{a \in A}} \boxed{\exists_{a \in A}} \boxed{a \leq d} \boxed{a \geq d}$$

oraz

$$(2) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{a \in A} \exists_{a \in A} a < d + \varepsilon \mid a > d - \varepsilon}.$$

Podobnie z warunku $g = \sup B$ wynika

$$(3) \quad \boxed{\forall_{b \in B} \exists_{b \in B} b \leq g \mid b \geq g}$$

oraz

$$(4) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{b \in B} \exists_{b \in B} b < g + \varepsilon \mid b > g - \varepsilon}.$$

Chcemy wykazać, że $\inf C = e$, gdzie $e = \boxed{d - g \mid g - d}$, czyli, że

$$(5) \quad \boxed{\forall_{c \in C} \exists_{c \in C} c \leq e \mid c \geq e}$$

oraz

$$(6) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{c \in C} \exists_{c \in C} c < e + \varepsilon \mid c > e - \varepsilon}.$$

W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).

Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).

$\boxed{\text{Dowolna} \mid \text{Istnieje}}$ liczba $c \in C$ $\boxed{\text{jest} \mid \text{będąca}}$ postaci $c = a - b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Z nierówności $\boxed{a \leq d \mid a \geq d}$ i $\boxed{b \leq g \mid b \geq g}$ otrzymujemy $\boxed{a - b \leq e \mid a - b \geq e}$, co dowodzi (5).

$\boxed{\text{Założmy} \mid \text{Wykażemy}}$ teraz prawdziwość warunku (6).

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy

$\boxed{\text{Znajdziemy taką liczbę dodatnią } \varepsilon, \text{ dla której}}$

istnieje $a \in A$ takie, że $\boxed{a > d - \varepsilon \mid a < d + \frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b \in B$ takie, że

$\boxed{b < g + \varepsilon \mid b > g - \frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c = a - b$ spełnia nierówność

$\boxed{c < e + \varepsilon \mid c > e - \varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6).

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

$$627. A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf A = \dots \quad \sup A = \dots$$

$$628. B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf B = \dots \quad \sup B = \dots$$

$$629. C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf C = \dots \quad \sup C = \dots$$

$$630. D = \left\{ \left(\frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf D = \dots \quad \sup D = \dots$$

$$631. E = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf E = \dots \quad \sup E = \dots$$

$$632. A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 350} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf A = \dots \quad \sup A = \dots$$

$$633. B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \inf B = \dots \quad \sup B = \dots$$

634. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf C = \dots \sup C = \dots$

635. $D = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf D = \dots \sup D = \dots$

636. $E = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf E = \dots \sup E = \dots$

637. $F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\}$ $\inf F = \dots \sup F = \dots$

638. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{n^2} \right\}$ $\inf G = \dots \sup G = \dots$

639. $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$ $\inf H = \dots \sup H = \dots$

640. $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$ $\inf I = \dots \sup I = \dots$

641. $J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\}$ $\inf J = \dots \sup J = \dots$

642. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

643. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A , że $0 < \sup A < 1$ oraz $\sup \{a^2 : a \in A\} = \sup A$.

644. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{k \cdot m^2 \cdot n^3}{k^3 + m^6 + n^9} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

645. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$