

Kolokwium nr 57: czwartek 14.12.2017, godz. 14:15, materiał zad. 1–391, 501–675.

7. Funkcje i ich własności. Ciągłość (c.d.)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 11.12.2017 (grupa 1 *lux*).

669. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

670. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji $f(x) = 2^x$ przecina wykres funkcji $g(x) = x^n + 4$, jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

671. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

672. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

673. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej w zerze, nieciągłej w pozostałych punktach.

674. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej w punktach postaci $1/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nieciągłej w pozostałych punktach.

675. Niech funkcja $f: [0, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x^3}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [0, 16]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 6$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 5$.