

Kolokwium nr 62: czwartek 25.01.2018, godz. 14:15-15:45, materiał zad. 1–500.63, 501-730.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 22.01.2018 (grupa 1 *lux*).

720. Obliczyć granicę (ciągu) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3}}{e^{n^2+pn}}$ dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

721. Funkcja ciągła $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^x$ dla $x > 0$. Obliczyć pochodną prawostronną $f'(0^+)$ albo wykazać, że nie istnieje.

W kolejnych zadaniach f i g są funkcjami różniczkowalnymi na wspólnej dziedzinie (będącej przedziałem) tyle razy, ile potrzeba. Gwiazdka oznacza, że trzeba wykreślić jeden z wariantów podanych w nawiasie.

722. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x) = g(x)$ ma n rozwiązań, to równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

723. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma n rozwiązań, to równanie $f(x) = g(x)$ ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

724. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x) = g(x)$ ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Uwaga: Pierwiastek p -krotny równania $f(x) = g(x)$ to taka liczba x , że $f^{(i)}(x) = g^{(i)}(x)$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ oraz $f^{(p)}(x) \neq g^{(p)}(x)$.

725. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$$

ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f(x) = g(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

726. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^2$.

727. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^{100}$.

728. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x = x^{101}$.

729. Dowieść, że

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

730. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia warunki $f(0) = 1$ i $f(1) = e$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że $f(x) = f'(x)$.

Wskazówka: Rozważaj funkcję g określoną wzorem $g(x) = \ln f(x)$.