

Kolokwium nr 8: poniedziałek 11.12.2017, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–391.

7. Funkcje i ich własności. Ciągłość.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 4,6.12.2017 (grupy 2–5).

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f , gdzie $f(x)$ jest dane wzorem

354. $\log_2 \log_2 x$ 355. $\log_2 \log_2 \log_2 x$ 356. $\log_2 \log_2 \log_3 x$ 357. $\log_2 \log_3 \log_2 x$
 358. $\log_3 \log_2 \log_2 x$ 359. $\log_3 \log_2 \log_2 |x|$ 360. $\log_3 \log_2 |\log_2 |x||$
 361. $\log_3 |\log_2 |\log_2 |x|||$ 362. $\log_2 \sin x$ 363. $\sqrt{2 \sin x + 1}$ 364. $\sqrt{x^{2014} - x^{2013}}$
 365. $\sqrt{x^{2014} + x^{2013}}$ 366. $\sqrt{x^{2014} - x^{2012}}$ 367. $\sqrt{x^{2013} - x^{2012}}$ 368. $\sqrt{x^{2013} + x^{2012}}$
 369. $\sqrt{x^{2013} - x^{2011}}$ 370. $\log_{(x^2-1)}(x^2-4)$ 371. $\log_{(x^2-4)}(x^2-1)$

372. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27-\delta, 27+\delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

373. $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ 374. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$
 375. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ 376. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$
 377. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ 378. $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Dla podanej funkcji f dobrać C i udowodnić oszacowanie

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

379. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$ 380. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$
 381. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$ 382. $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

383. $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ 384. $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$
 385. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)
 386. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

W miarę wolnego czasu mogą być omówione na ćwiczeniach.

Odpowiedzi i rozwiązania są na liście 7R.

387. Niech funkcja $f: [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

- a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.
 b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

388. Dla funkcji $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|$.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

389. Niech funkcja $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

390. W każdym z zadań **390.1-390.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

390.1. $f(x) = \sqrt{(x-64) \cdot (x^2-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.2. $f(x) = \sqrt{(x^2-64) \cdot (x^3-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.3. $f(x) = \sqrt{(x^3-64) \cdot (x^6-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.4. $f(x) = \sqrt{(x^6-64) \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.5. $f(x) = \sqrt{(2^x-64) \cdot (x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.6. $f(x) = \sqrt{(x-64)^2 \cdot (x^3-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.7. $f(x) = \sqrt{(x^2-64)^2 \cdot (x^6-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.8. $f(x) = \sqrt{(x^3-64)^2 \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.9. $f(x) = \sqrt{(x^6-64)^2 \cdot (x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

390.10. $f(x) = \sqrt{(2^x-64)^2 \cdot (x^2-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

391. W każdym z zadań **391.1-391.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a|x| + bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

391.1. $a = 1$, $b = \dots\dots\dots$

391.2. $a = -1$, $b = \dots\dots\dots$

391.3. $a = 2$, $b = \dots\dots\dots$

391.4. $a = -2$, $b = \dots\dots\dots$

391.5. $a = 3$, $b = \dots\dots\dots$

391.6. $a = -3$, $b = \dots\dots\dots$

391.7. $a = 3/4$, $b = \dots\dots\dots$

391.8. $a = -3/4$, $b = \dots\dots\dots$

391.9. $a = 4/3$, $b = \dots\dots\dots$

391.10. $a = -4/3$, $b = \dots\dots\dots$