

387. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.

388. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|$.

a) $f(x) = x^2$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y) \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100.$$

Możemy więc wskazać $x = 50, y = 51$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100, \quad \text{czyli} \quad xy < \frac{1}{100}.$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10, y = 1/11$.

389. Niech funkcja $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{|x - y|}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot \sqrt{xy}} \leq \frac{|x - y|}{(\sqrt{4} + \sqrt{4}) \cdot \sqrt{16}} = \\ &= \frac{|x - y|}{(2 + 2) \cdot 4} = \frac{|x - y|}{16}, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

390. W każdym z zadań **390.1-390.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

390.1. $f(x) = \sqrt{(x-64) \cdot (x^2-64)}$ $D_f = [-8, 8] \cup [64, +\infty)$

390.2. $f(x) = \sqrt{(x^2-64) \cdot (x^3-64)}$ $D_f = [-8, 4] \cup [8, +\infty)$

390.3. $f(x) = \sqrt{(x^3-64) \cdot (x^6-64)}$ $D_f = [-2, 2] \cup [4, +\infty)$

390.4. $f(x) = \sqrt{(x^6-64) \cdot (2^x-64)}$ $D_f = [-2, 2] \cup [6, +\infty)$

390.5. $f(x) = \sqrt{(2^x-64) \cdot (x-64)}$ $D_f = (-\infty, 6] \cup [64, +\infty)$

390.6. $f(x) = \sqrt{(x-64)^2 \cdot (x^3-64)}$ $D_f = [4, +\infty)$

390.7. $f(x) = \sqrt{(x^2-64)^2 \cdot (x^6-64)}$ $D_f = (-\infty - 2] \cup [2, +\infty)$

390.8. $f(x) = \sqrt{(x^3-64)^2 \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \{4\} \cup [6, +\infty)$

390.9. $f(x) = \sqrt{(x^6-64)^2 \cdot (x-64)}$ $D_f = \{-2\} \cup \{2\} \cup [64, +\infty)$

390.10. $f(x) = \sqrt{(2^x-64)^2 \cdot (x^2-64)}$ $D_f = (-\infty, -8] \cup \{6\} \cup [8, +\infty)$

391. W każdym z zadań **391.1-391.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a|x| + bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

391.1. $a = 1, \quad b = -\sqrt{2}$

391.2. $a = -1, \quad b = -\sqrt{2}$

391.3. $a = 2, \quad b = -\sqrt{5}$

391.4. $a = -2, \quad b = -\sqrt{5}$

391.5. $a = 3, \quad b = -\sqrt{10}$

391.6. $a = -3, \quad b = -\sqrt{10}$

391.7. $a = 3/4, \quad b = -5/4$

391.8. $a = -3/4, \quad b = -5/4$

391.9. $a = 4/3, \quad b = -5/3$

391.10. $a = -4/3, \quad b = -5/3$