

7. Funkcje i ich własności. Ciągłość. (c.d)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 11.12.2017 (grupy 2–5).

392. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

393. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax-b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

394. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\}^3 + b \cdot \{x\}^2 + c \cdot \{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

Jakie warunki muszą spełniać liczby a, b, c, d , aby funkcja f była ciągła?

395. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x+1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

Jakie warunki muszą spełniać liczby a, b, c, d , aby funkcja f była ciągła?

396. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

397. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

398. Dowieść, że równanie $\cos x = x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

399. Dowieść, że równanie $\cos x = x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

400. Dowieść, że równanie $x^{2017} + x = 2017$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.