

Egzamin, 18.06.2018, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2} x^2 = 2,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax + B & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 + Cx + D & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (*)$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x = 3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A + B = 3C + D. \quad (\clubsuit)$$

Warunki $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0 = B, \quad (\diamond)$$

$$2 = 4 + 2A + B, \quad (\heartsuit)$$

$$4 = 16 + 4C + D. \quad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań $(\clubsuit)$, $(\diamond)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ prowadzi do

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -9, \quad D = 24.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 - 9x + 24 & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (**)$$

Zatem $f(5) = 4$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

Punkty za wskazanie możliwej postaci funkcji f (**max 5 punktów**):

- Podanie wzoru x^2 — **1 punkt za całe rozwiązanie**
- Podanie wzoru $x^2 + Ax + B$ — **3 punkty za całe rozwiązanie**
- Podanie wzoru $(*)$ — **5 punktów i możliwość zdobycia punktów za dalszą część rozwiązania**

Punkty za dalszą część rozwiązania **pod warunkiem podania wzoru $(*)$** :

- Podanie równania $(\clubsuit)$ — **2 punkty (razem 7 punktów)**
- Podanie równań $(\diamond)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ — **1 punkt (razem 8 punktów)**
- Wyznaczenie A, B, C, D — **1 punkt (razem 9 punktów)**
- Wyliczenie $f(5)$ — **1 punkt (razem 10 punktów)**

Zadanie 12. (10 punktów)

Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx$ jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx = \int_0^1 \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx \leq \int_0^1 \frac{x^p}{0 + x^e} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{e-p}} < +\infty,$$

o ile $e - p < 1$, czyli $p > e - 1$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx \geq \int_0^1 \frac{x^p}{x^e + x^e} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{e-p}} = +\infty,$$

o ile $e - p \geq 1$, czyli $p \leq e - 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + 0} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\pi-p}} < +\infty,$$

o ile $\pi - p > 1$, czyli $p < \pi - 1$.

Ponadto

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^e} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^{\pi} + x^{\pi}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\pi-p}} = +\infty,$$

o ile $\pi - p \leq 1$, czyli $p \geq \pi - 1$.

Wniosek: Jeżeli $e - 1 < p < \pi - 1$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p \in (e - 1, \pi - 1)$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Podział przedziału całkowania — **bez punktów** (każdy to powinien wiedzieć)
- Każde z 4 szacowań — **po 2 punkty**
- Wyciągnięcie wniosków z oszacowań i sformułowanie odpowiedzi — **2 punkty**

Zadanie 13. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}$.

Starannie sformułuj kryteria, z których korzystasz i szczegółowo je uzasadnij.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.
Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2 + 2} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 2} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 2},$$

która jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\begin{aligned} n \cdot (n^2 + 2n + 3) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 2), \\ n^3 + 2n^2 + 3n &\geq n^3 + n^2 + 2n + 2, \\ n^2 + n &\geq 2, \end{aligned}$$

co jest spełnione dla każdego $n \geq 1$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Sformułowanie kryterium Leibniza i stwierdzenie, że 1° zachodzi — **2 punkty**
- Sprawdzenie 2° — **1 punkt**
- Sprawdzenie 3° — **7 punktów**

Zadanie 14. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x = (t^2 - 1)^2$ i formalnie $dx = 4(t^3 - t) dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int_1^2 \frac{4(t^3 - t) dt}{t} = 4 \cdot \int_1^2 t^2 - 1 dt = \frac{4t^3}{3} - 4t \Big|_{t=1}^2 = \frac{32}{3} - 8 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $16/3$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Wskazanie właściwego podstawienia — **1 punkt**
- Wykonanie podstawienia — **6 punktów (w tym 2 za granice całkowania)**
- Obliczenie wartości całki — **3 punkty**

Zadanie 15. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} dx$.

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x = t^4$, czyli formalnie $dx = 4t^3 dt$:

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t dt.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t dt &= t^4 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^4}{t^2+1} dt = \\ &= 9 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 + 1} dt = 9 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{1}{3} + 1 - \operatorname{arctg} 1 \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} = 3\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Wskazanie podstawienia — **1 punkt**
- Wykonanie podstawienia — **2 punkty**
- Wykonanie całkowania przez części — **5 punktów**
- Obliczenie wartości całki — **2 punkty (w tym 1 za uproszczenie wyniku)**

Zadanie 16. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot x^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \quad (*)$$

$$1 = (Ax + B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2 + 1) + D \cdot (x^2 + 1),$$

$$1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A = 0$ oraz $B = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2} &= \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2} dx = -\arctg x - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{\sqrt{3}} = -\arctg \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg 1 + 1 = \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Zapisanie postaci ogólnej rozkładu na ułamki proste (*) — **2 punkty**
- Wyliczenie A, B, C, D — **2 punkty**
- Wykonanie całkowania (poprawna funkcja pierwotna) — **4 punkty**
- Obliczenie wartości całki — **2 punkty (w tym 1 za uproszczenie wyniku)**

Jeżeli podana postać ogólna rozkładu na ułamki proste jest błędna lub niepełna (np. pominięte są współczynniki, które w tym wypadku okazują się być zerami), nawet przy poprawnej dalszej części rozwiązania i poprawnym wyniku końcowym **ocena za zadanie nie może być wyższa niż 4 punkty**. Nie dotyczy to rozwiązań, które omijają konieczność rozkładu na ułamki proste i są całkowicie poprawne.

Zadanie 21. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki $\int_0^{\pi} \cos^{10} x \, dx$.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos^{10} x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{10} = \\ &= \frac{z^{10} + 10z^8 + 45z^6 + 120z^4 + 210z^2 + 252 + 210z^{-2} + 120z^{-4} + 45z^{-6} + 10z^{-8} + z^{-10}}{1024} = \\ &= \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{\pi} \cos^{10} x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256} \right) dx = \frac{63\pi}{256}.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $63\pi/256$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Wyprowadzenie tożsamości trygonometrycznej — **6 punktów**
- Obliczenie wartości całki — **4 punkty**

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n+4} + \dots + \sqrt[3]{8n-2} + \sqrt[3]{8n-1} + \sqrt[3]{8n} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p \cdot \sqrt[3]{n+k} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^8 f(x) dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} \Big|_{x=1}^8 = \frac{3}{4} \cdot 16 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -4/3$.

Odpowiedź: Dla $p = -4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- Dojście do $n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}$ — **3 punkty**
- Wskazanie $p = -4/3$ — **2 punkty**
- Podanie całki oznaczonej będącej granicą ciągu sum Riemanna — **3 punkty**
- Obliczenie całki i udzielenie odpowiedzi — **2 punkty**

Jeżeli nie została podana prawidłowa wartość $p = -4/3$, **ocena za zadanie nie może być wyższa niż 4 punkty**.

Zadanie 23. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n}. \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (1) traktowanego jako zespolony szereg liczbowy z parametrem z .

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n} \right|} = \left| \frac{n^n \cdot z^n}{n!} \right| = \frac{n^n \cdot |z|^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do rzeczywistego ciągu liczbowego (b_n) .

Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |z|^n} = \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |z|}{(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |z| \rightarrow e \cdot |z|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |z|$.

Jeżeli $e \cdot |z| < 1$, czyli $|z| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \rightarrow 0 < 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |z| > 1$, czyli $|z| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \rightarrow +\infty > 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu zespolony szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Zastosowanie kryterium Cauchy'ego — **3 punkty**
- Zastosowanie kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) — **5 punktów, w tym 2 za wyliczenie granicy $e \cdot |z|$**
- Przedstawienie poprawnego wnioskowania z obydwu kryteriów i udzielenie odpowiedzi — **2 punkty**

Jeżeli w podanej odpowiedzi nie występuje liczba e , **ocena za zadanie nie może być wyższa niż 5 punktów.**

Zadanie 24. (10 punktów)

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}$.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n} \right|} = \frac{|z|^3}{8 \cdot \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{|z|^3}{8}.$$

Jeżeli $|z|^3/8 < 1$, czyli $|z| < 2$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny. Jeśli zaś $|z|^3/8 > 1$, czyli $|z| > 2$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy 2 i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z| = 2$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z^3/8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n},$$

gdzie $w = -z^3/8$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $-z^3/8 = 1$, czyli $z^3 = -8$. Jednym z rozwiązań jest $z = 2$, a pozostałe dwa rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu 2 w równych odległościach kątowych — mają argumenty $\pm\pi/3$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu 2 wraz z brzegiem oprócz trzech punktów: -2 oraz $1 \pm \sqrt{3}i$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

- Wyznaczenie promienia zbieżności — **3 punkty**
- Rozważenie przypadku $w \neq 1$ — **3 punkty**
- Rozważenie przypadku $w = 1$ — **2 punkty**
- Rozwiązanie równania $w = 1$ i sformułowanie odpowiedzi — **2 punkty**

Zadanie 25. (10 punktów)

Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\left(\frac{2n}{n}\right) \cdot x\right)}{\left(\frac{3n}{n}\right)^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\left(\frac{2n}{n}\right)^k \cdot j\sin\left(\left(\frac{2n}{n}\right) \cdot x\right)}{\left(\frac{3n}{n}\right)^4},$$

gdzie $j\sin$ jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Stąd

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{\left(\frac{2n}{n}\right)^k}{\left(\frac{3n}{n}\right)^4}. \quad (2)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2n}{n}\right)^k}{\left(\frac{3n}{n}\right)^4} \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)^k \cdot \left(\frac{3n}{n}\right)^4}{\left(\frac{3n+3}{n+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{2n}{n}\right)^k} = \frac{\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)^k}{\left(\frac{2n}{n}\right)^k} \cdot \frac{\left(\frac{3n}{n}\right)^4}{\left(\frac{3n+3}{n+1}\right)^4} = \\ & = \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2}\right)^k \cdot \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}\right)^4 \rightarrow \frac{4^k \cdot 4^4}{27^4} = \frac{2^{2k+8}}{3^{12}} = \left(\frac{2^{k+4}}{3^6}\right)^2 = g. \end{aligned}$$

Ponieważ $3^6 = 729$, zachodzą nierówności $2^9 < 3^6 < 2^{10}$. Zatem dla $k=5$ otrzymujemy $g < 1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (2) otrzymujemy $g > 1$ dla $k=6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (2) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności

$$\|f_n^{(6)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=5$.

Zadanie 26. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$.

Rozwiązanie:

Ponieważ zbieżność całki niewłaściwej nie zależy od zmiany granicy całkowania, w której nie ma osobliwości, możemy dla uproszczenia rozważać całkę

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Wykonując podstawienie $x = \sqrt{t}$ i formalnie $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ otrzymujemy

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Całkowanie przez części prowadzi do

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_{\pi}^{\infty} \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left. \frac{-\cos t}{\sqrt{t}} \right|_{t=\pi}^{\infty} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{-\cos t}{-2t^{3/2}} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos \pi}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt = \\ &= 0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Problem zbieżności danej w zadaniu całki sprowadza się więc do zbieżności całki

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt,$$

która jest zbieżna na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej i kryterium porównawczego:

$$\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| dt \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt < +\infty, \quad \text{bo } 3/2 > 1.$$

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna.

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}$.

Rozwiązanie:

Rozłożmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+3}, \\ 1 &= A \cdot (n+1) \cdot (n+3) + B \cdot n \cdot (n+3) + C \cdot n \cdot (n+1), \\ \text{dla } n=0: \quad 1 &= 3A, \quad A = 1/3, \\ \text{dla } n=-1: \quad 1 &= -2B, \quad B = -1/2, \\ \text{dla } n=-3: \quad 1 &= 6C, \quad C = 1/6. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)} = \frac{1/3}{n} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/6}{n+3}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/3}{n} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/6}{n+3} \right) = \\ &= \left(\frac{1/3}{1} - \frac{1/2}{2} + \frac{1/6}{4} \right) + \left(\frac{1/3}{2} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/6}{5} \right) + \left(\frac{1/3}{3} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/6}{6} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1/3}{4} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/6}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1/3}{N-3} - \frac{1/2}{N-2} + \frac{1/6}{N} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1/3}{N-2} - \frac{1/2}{N-1} + \frac{1/6}{N+1} \right) + \left(\frac{1/3}{N-1} - \frac{1/2}{N} + \frac{1/6}{N+2} \right) + \left(\frac{1/3}{N} - \frac{1/2}{N+1} + \frac{1/6}{N+3} \right) = \\ &= \frac{1/3}{1} - \frac{1/6}{2} - \frac{1/6}{3} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/6}{N+3} = \frac{7}{36} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/6}{N+3} \rightarrow \frac{7}{36} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $7/36$.

Zadanie **32.** (10 punktów)

Dana jest taka funkcja ciągła $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, że całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Udowodnić zbieżność całki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} dx.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} = \sqrt[4]{f(x) \cdot \frac{1}{x^{4/3}} \cdot \frac{1}{x^{4/3}} \cdot \frac{1}{x^{4/3}}} \leq \frac{f(x) + \frac{1}{x^{4/3}} + \frac{1}{x^{4/3}} + \frac{1}{x^{4/3}}}{4} = \frac{f(x)}{4} + \frac{3/4}{x^{4/3}},$$

skąd na mocy kryterium porównawczego otrzymujemy zbieżność całki podanej w tezie zadania:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{4} + \frac{3/4}{x^{4/3}} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_1^{\infty} f(x) dx + \frac{3}{4} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4/3}} < +\infty.$$

Zadanie 33. (10 punktów)

Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{11}$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ jest rozbieżny. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[9]{m}} & \text{dla } r=1, \\ -\frac{1}{\sqrt[9]{m}} & \text{dla } r=2,3. \end{cases}$$

Powyższy ciąg prowadzi do następujących szeregów:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 2 - 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt[9]{2}} - \frac{1}{\sqrt[9]{2}} - \frac{1}{\sqrt[9]{2}} + \frac{2}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[9]{3}} + \frac{2}{\sqrt[9]{4}} - \frac{1}{\sqrt[9]{4}} - \frac{1}{\sqrt[9]{4}} \dots = \\ &= (2 - 1 - 1) + \left(\frac{2}{\sqrt[9]{2}} - \frac{1}{\sqrt[9]{2}} - \frac{1}{\sqrt[9]{2}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[9]{3}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[9]{4}} - \frac{1}{\sqrt[9]{4}} - \frac{1}{\sqrt[9]{4}} \right) \dots = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Odnotujmy, że wobec $a_n \rightarrow 0$ możemy najpierw sumować po trzy kolejne wyrazy szeregu, a potem dodawać otrzymane sumy.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^9 &= 2^9 - 1 - 1 + \frac{2^9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2^9}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2^9}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \dots = \\ &= (512 - 1 - 1) + \left(\frac{512}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{512}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{512}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \dots = \\ &= 510 + \frac{510}{2} + \frac{510}{3} + \frac{510}{4} + \dots = 510 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \quad (\text{szereg harmoniczny}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{11} &= \\ &= 2^{11} - 1 - 1 + \frac{2^{11}}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} + \frac{2^{11}}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} + \frac{2^{11}}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} \dots = \\ &= (2048 - 1 - 1) + \left(\frac{2048}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} \right) + \left(\frac{2048}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} \right) + \\ &+ \left(\frac{2048}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} \right) \dots = 2046 + \frac{2046}{2^{11/9}} + \frac{2046}{3^{11/9}} + \frac{2046}{4^{11/9}} + \dots = 2046 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/9}} < +\infty. \\ &\quad (\text{bo } 11/9 > 1) \end{aligned}$$

Zadanie 34. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11} dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+11}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot (x^2+11)^{-2/3}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot (x^2+11)^{-2/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+11)^{-5/3} = \\ &= \frac{2x^2+22}{3} \cdot (x^2+11)^{-5/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+11)^{-5/3} = \frac{6x^2+66-8x^2}{9} \cdot (x^2+11)^{-5/3} = \\ &= \frac{-2x^2+66}{9} \cdot (x^2+11)^{-5/3} = (33-x^2) \cdot \frac{2}{9} \cdot (x^2+11)^{-5/3} > 0, \quad \text{o ile} \quad x^2 < 33, \end{aligned}$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[-\sqrt{33}, \sqrt{33}]$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[3, 5]$.

Ponieważ $f(4) = 3$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej¹ stycznej do wykresu w punkcie $(4, 3)$. Wobec tego

$$f(x) > 3 + f'(4) \cdot (x-4) \quad \text{dla} \quad x \in (3, 5)$$

i w konsekwencji

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11} dx > \int_3^5 3 + f'(4) \cdot (x-4) dx = 6.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 6.**Uwaga:** Faktycznie podana całka ma wartość w przybliżeniu równą 6,005.

¹Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.

Zadanie **35.** (10 punktów)

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, że całka niewłaściwa $\int_0^\infty f(x) dx$

jest zbieżna, ale całka $\int_0^\infty f(x)^2 dx$ jest rozbieżna.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Niech f będzie równa zero poza małymi otoczeniami liczb naturalnych, gdzie jej wykres stanowią ramiona wąskiego i wysokiego trójkąta równoramiennego o podstawie leżącej na osi OX . Niech wokół liczby n ten trójkąt ma podstawę $1/4^n$ i wysokość 2^n . Jego pole jest wówczas równe $1/2^{n+1}$, co po wysumowaniu szeregu geometrycznego prowadzi do

$$\int_0^\infty f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Wykres funkcji f^2 wokół liczby n jest wówczas krzywoliniowym trójkątem o parabolicznych ramionach (a dokładniej: wykres stanowią ramiona tego trójkąta). Jego podstawa jest równa $1/4^n$, a wysokość 4^n , co daje pole $1/3$. Wobec tego

$$\int_0^\infty f(x)^2 dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3} = +\infty.$$

Zadanie 36. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-10}^{10} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2}+x-1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2}-x-1) dx.$$

*Rozwiązanie:*Funkcja $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

ma pochodną

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{(t-1)^2+1} + \frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{(2-t)^2+t^2} = \\ &= \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{4-4t+2t^2} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{1}{2-2t+t^2} = 0, \end{aligned}$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

mamy $g(t) = \pi/4$ dla każdego $t \in (0, +\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t = \sqrt{x^2+2} + x$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t} = \sqrt{x^2+2} - x,$$

skąd

$$f(x) = g(t) = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji

$$\int_{-10}^{10} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2}+x-1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2}-x-1) dx = \int_{-10}^{10} \frac{\pi}{4} dx = 5\pi.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 5π .