

Egzamin, 18.06.2018, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Zadanie 12. (10 punktów)

Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e} dx$ jest zbieżna.

Zadanie 13. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}$.

Starannie sformułuj kryteria, z których korzystasz i szczegółowo je uzasadnij.

Zadanie 14. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

Zadanie 15. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^9 \arctg \sqrt[4]{x} dx$.

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Zadanie 16. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Zadanie 21. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki $\int_0^{\pi} \cos^{10} x \, dx$.

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n+4} + \dots + \sqrt[3]{8n-2} + \sqrt[3]{8n-1} + \sqrt[3]{8n} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Zadanie 23. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n}.$$

Zadanie 24. (10 punktów)

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}$.

Zadanie 25. (10 punktów)

Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 26. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx$.

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}$.

Zadanie 32. (10 punktów)

Dana jest taka funkcja ciągła $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, że całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Udowodnić zbieżność całki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} dx.$$

Zadanie 33. (10 punktów)

Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{11}$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ jest rozbieżny. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 34. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2 + 11} dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

Zadanie 35. (10 punktów)

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, że całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} f(x) dx$

jest zbieżna, ale całka $\int_0^{\infty} f(x)^2 dx$ jest rozbieżna.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 36. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-10}^{10} \arctg \left(\sqrt{x^2 + 2} + x - 1 \right) + \arctg \left(\sqrt{x^2 + 2} - x - 1 \right) dx.$$