

KOŁOKWIUM nr 10, 14.05.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 19.** (10 punktów)W każdym z zadań **19.1-19.12** podaj sumę szeregu w postaci **liczby całkowitej**.Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **max(0, n–2) punktów**.W zadaniach **19.0** i **19.00** podane są poprawne odpowiedzi – możesz sobie rozwiązać te zadania, aby sprawdzić, czy nie popełniasz jakiegoś błędu rachunkowego.Niech $a_n = \frac{8n - 4\sqrt{3n-2} - 1}{\sqrt{16n^2 - 15}}$. Wówczas:

19.0. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = 1$

19.00. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = 0$

19.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = 5$

19.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = 2$

19.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) = 19$

19.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+2}^3) = 12$

$$\mathbf{19.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{19.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{19.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \mathbf{18}$$

$$\mathbf{19.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+2}}) = \mathbf{12}$$

$$\mathbf{19.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{48}$$

$$\mathbf{19.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{19.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+1} - 23} \right) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{19.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{24a_n - 23} - \sqrt{24a_{n+2} - 23} \right) = \mathbf{-2}$$

Zadanie 20. (10 punktów)

Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

Rozwiązanie:

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1 - (-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} = \quad \text{(dotąd wystarczy)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$