

KOŁOKWIUM nr 11, 11.06.2018, godz. 9:30–11:00**Zadanie 21.** (10 punktów)Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx$.*Rozwiązanie:*

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^6 = \frac{z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15z^{-2} + 6z^{-4} + z^{-6}}{64} = \\ &= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16} \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} \, dx + \int_0^{\pi/6} \frac{5}{16} \, dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} \Bigg|_{x=1}^{\pi/6} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5}{16} = \\ &= \frac{\sin \pi}{192} + \frac{3\sin(2\pi/3)}{64} + \frac{15\sin(\pi/3)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{0}{192} + \frac{3 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{15 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \\ &= \frac{18 \cdot (\sqrt{3}/2)}{64} + \frac{5\pi}{96} = \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{5\pi}{96}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{96} + \frac{9\sqrt{3}}{64}$.

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x-5}{x^3-x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 0.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x-5}{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1},$$

$$x-5 = A \cdot x \cdot (x+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x+1) + C \cdot (x-1) \cdot x.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -2 otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=1 \quad -4 = 2A, \quad \text{skąd} \quad A = -2,$$

$$\text{dla } x=0 \quad -5 = -B, \quad \text{skąd} \quad B = 5,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad -6 = 2C, \quad \text{skąd} \quad C = -3.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x-5}{x^3-x} dx &= \int_2^{\infty} -\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x} - \frac{3}{x+1} dx = -2\ln|x-1| + 5\ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1| \Big|_{x=2}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (-2\ln|x-1| + 5\ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1|) \right) + 2\ln 1 - 5\ln 2 + 3 \cdot \ln 3 = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln 1 + \ln \frac{27}{32} = \ln \frac{27}{32} < \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{27}{32} < 0$.

Uwaga: Całki $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$, $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$, $\int_2^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+1|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane (a więc ocena częściowa musi być mniejsza od 50%, czyli od 5 punktów).

Zadanie 23. (20 punktów)

W każdym z zadań **23.1-23.20** podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

Przedział może być nieograniczony (tzn. mieć koniec $\pm\infty$).

Za każdy poprawnie podany przedział otrzymasz **1 punkt**.

Bardzo starannie pisz końce przedziału, aby było jasne, czy Twoim zdaniem należą one do przedziału.

23.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (3, +\infty)$

23.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^p+n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (3, +\infty)$

23.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^p+n^4}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-\infty, +\infty)$

23.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^p+n^4}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (4, +\infty)$

23.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (0, +\infty)$

23.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^p+n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-\infty, +\infty)$

23.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (8, +\infty)$

23.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{\sqrt[3]{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (18, +\infty)$

23.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (p+1)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-2, 0)$

23.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [-2, 0)$

23.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [-2, 0]$

23.12. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-8)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (7, 9)$

23.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-8)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [7, 9)$

23.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-8)^n}{n^3}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [7, 9]$

23.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-8)^n}{2^n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (6, 10)$

23.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-8)^n}{3^n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (5, 11)$

23.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-8)^n}{4^n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (4, 12)$

23.18. $\sum_{n=1}^{\infty} (3p+2)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-1, -1/3)$

23.19. $\sum_{n=1}^{\infty} (5p+2)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-3/5, -1/5)$

23.20. $\sum_{n=1}^{\infty} (5p-3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (2/5, 4/5)$
