

KOŁOKWIUM nr 1, 26.02.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 1. (10 punktów)**

Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + 3x^2) = 6x + 6,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + Ax + B & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ x^3 + 3x^2 + Cx + D & \text{dla } x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (*)$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x = 1$, czyli musi zachodzić równość

$$A + B = C + D. \quad (\clubsuit)$$

Warunki $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1 = 2 - A + B, \quad (\diamond)$$

$$0 = B, \quad (\heartsuit)$$

$$2 = 20 + 2C + D. \quad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań $(\clubsuit)$, $(\diamond)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ prowadzi do

$$A = 3, \quad B = 0, \quad C = -21, \quad D = 24.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ x^3 + 3x^2 - 21x + 24 & \text{dla } x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (**)$$

Zatem $f(3) = 15$.

Punktacja standardowych rozwiązań:

Punkty za wskazanie możliwej postaci funkcji f (**max 5 punktów**):

- Podanie wzoru $x^3 + 3x^2$ — **1 punkt za całe rozwiązanie**
- Podanie wzoru $x^3 + 3x^2 + Ax + B$ — **3 punkty za całe rozwiązanie**
- Podanie wzoru $(*)$ — **5 punktów i możliwość zdobycia punktów za dalszą część rozwiązania**

Punkty za dalszą część rozwiązania **pod warunkiem podania wzoru $(*)$** :

- Podanie równania $(\clubsuit)$ — **2 punkty (razem 7 punktów)**
- Podanie równań $(\diamond)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ — **1 punkt (razem 8 punktów)**
- Wyznaczenie A, B, C, D — **1 punkt (razem 9 punktów)**
- Wyliczenie $f(3)$ — **1 punkt (razem 10 punktów)**

Zadanie 2. (10 punktów)

W każdym z zadań **2.1-2.5** podaj wzór na funkcję różniczkowalną $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

Za każdą poprawnie podaną funkcję otrzymasz **2 punkty**.

Za podanie funkcji o poprawnej pochodnej, ale błędnej wartości w podanym punkcie otrzymasz **1 punkt**.

2.1.	$f'_1(x) = \sqrt[5]{x}$	$f_1(1) = 1$
-------------	-------------------------	--------------

$$f_1(x) = \frac{5x^{6/5}}{6} + \frac{1}{6}$$

2.2.	$f'_2(x) = 200x \cdot (x^2 + 1)^{99}$	$f_2(0) = 0$
-------------	---------------------------------------	--------------

$$f_2(x) = (x^2 + 1)^{100} - 1$$

2.3.	$f'_3(x) = 6x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 9}$	$f_3(2) = 2$
-------------	---------------------------------------	--------------

$$f_3(x) = (x^4 + 9)^{3/2} - 123$$

2.4.	$f'_4(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$	$f_4(-1) = -1$
-------------	----------------------------------	----------------

$$f_4(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 1$$

2.5.	$f'_5(x) = \frac{4x^3 + 2x + 1}{(x^4 + x^2 + x + 1)^2}$	$f_5(1) = 1$
-------------	---	--------------

$$f_5(x) = -\frac{1}{x^4 + x^2 + x + 1} + \frac{5}{4}$$