

KOŁOKWIUM nr 2, 5.03.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 3. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$I(x) = \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x} dx.$$

Sprawdzić, że $I(e) = I(1) + 2$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.*Rozwiązanie:*Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{\ln x}$, czyli $x = e^{t^2}$ i formalnie $dx = e^{t^2} \cdot 2t dt$, a następnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x} dx = \int \frac{e^t}{e^{t^2}} \cdot e^{t^2} \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot e^t dt = 2t \cdot e^t - 2 \int e^t dt = 2t \cdot e^t - 2e^t + C = \\ &= 2\sqrt{\ln x} \cdot e^{\sqrt{\ln x}} - 2e^{\sqrt{\ln x}} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} I(1) &= -2 + C, \\ I(e) &= C = -2 + 2 + C = I(1) + 2. \end{aligned}$$

Zadanie 4. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$J(x) = \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx.$$

Sprawdzić, że $J(1) = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

*Rozwiązanie:**Sposób I*

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = x^2 \cdot \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} - \frac{3}{2} \cdot \int x \cdot (x+1)^{4/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{4/3} - \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{3 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{9}{14} \cdot \int (x+1)^{7/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{4/3} - \frac{9}{14} \cdot x \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{27}{140} \cdot (x+1)^{10/3} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} J(-1) &= C, \\ J(1) &= \frac{3}{4} \cdot 2 \sqrt[3]{2} - \frac{9}{14} \cdot 4 \sqrt[3]{2} + \frac{27}{140} \cdot 8 \sqrt[3]{2} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{18}{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{54}{35} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{180}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{108}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \frac{105 - 180 + 108}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{33}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}. \end{aligned}$$

*Sposób II*Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt[3]{x+1}$, czyli $x = t^3 - 1$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = \int (t^3 - 1)^2 \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3 dt = \\ &= \frac{3}{10} \cdot t^{10} - \frac{6}{7} \cdot t^7 + \frac{3}{4} \cdot t^4 + C = \frac{3}{10} \cdot (x+1)^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot (x+1)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} J(-1) &= C, \\ J(1) &= \frac{3}{10} \cdot 8 \sqrt[3]{2} - \frac{6}{7} \cdot 4 \sqrt[3]{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 \sqrt[3]{2} + C = \frac{12}{5} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{24}{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{168}{70} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{240}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \frac{168 - 240 + 105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{33}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}. \end{aligned}$$

*Sposób III*Wykonujemy podstawienie $t = x+1$, czyli $x = t-1$ i formalnie $dx = dt$:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = \int (t-1)^2 \cdot \sqrt[3]{t} dt = \int t^{7/3} - 2t^{4/3} + t^{1/3} dt = \\ &= \frac{3}{10} \cdot t^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot t^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot t^{4/3} + C = \frac{3}{10} \cdot (x+1)^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot (x+1)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie jak w sposobie II.