

KOŁOKWIUM nr 3, 12.03.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 5. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}},$$

skąd kolejno

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = t^2 - 1,$$

$$\sqrt{1 + x} = (t^2 - 1)^2 - 1 = t^4 - 2t^2,$$

$$x = (t^4 - 2t^2)^2 - 1 = t^8 - 4t^6 + 4t^4 - 1$$

i formalnie

$$dx = 8t^7 - 24t^5 + 16t^3 dt,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx &= \int t \cdot (8t^7 - 24t^5 + 16t^3) dt = \int 8t^8 - 24t^6 + 16t^4 dt = \\ &= \frac{8t^9}{9} - \frac{24t^7}{7} + \frac{16t^5}{5} + C = \\ &= \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{9/2} - \frac{24}{7} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{7/2} + \frac{16}{5} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^{5/2} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 6. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{x+4}, \\ x+2 &= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \\ &+ \frac{D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+4)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}. \end{aligned} \quad (1)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (1), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (1) kolejno $x=0, -1, -3, -4$. Otrzymujemy:

$$\text{dla } x=0 \quad 2=12A, \text{ skąd } A=1/6,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad 1=-6B, \text{ skąd } B=-1/6,$$

$$\text{dla } x=-3 \quad -1=6D, \text{ skąd } D=-1/6,$$

$$\text{dla } x=-4 \quad -2=-12E, \text{ skąd } E=1/6.$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln |x| - \ln |x+1| - \ln |x+3| + \ln |x+4|) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \int \frac{x+2}{(x \cdot (x+4)) \cdot ((x+1) \cdot (x+3))} dx = \\ &= \int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 4x$ i formalnie $dt = 2(x+2) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+3)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1/3}{t+3},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)} &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{6} \cdot (\ln |t| - \ln |t+3|) + C = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln |x^2+4x| - \ln |x^2+4x+3|) + C. \end{aligned}$$