

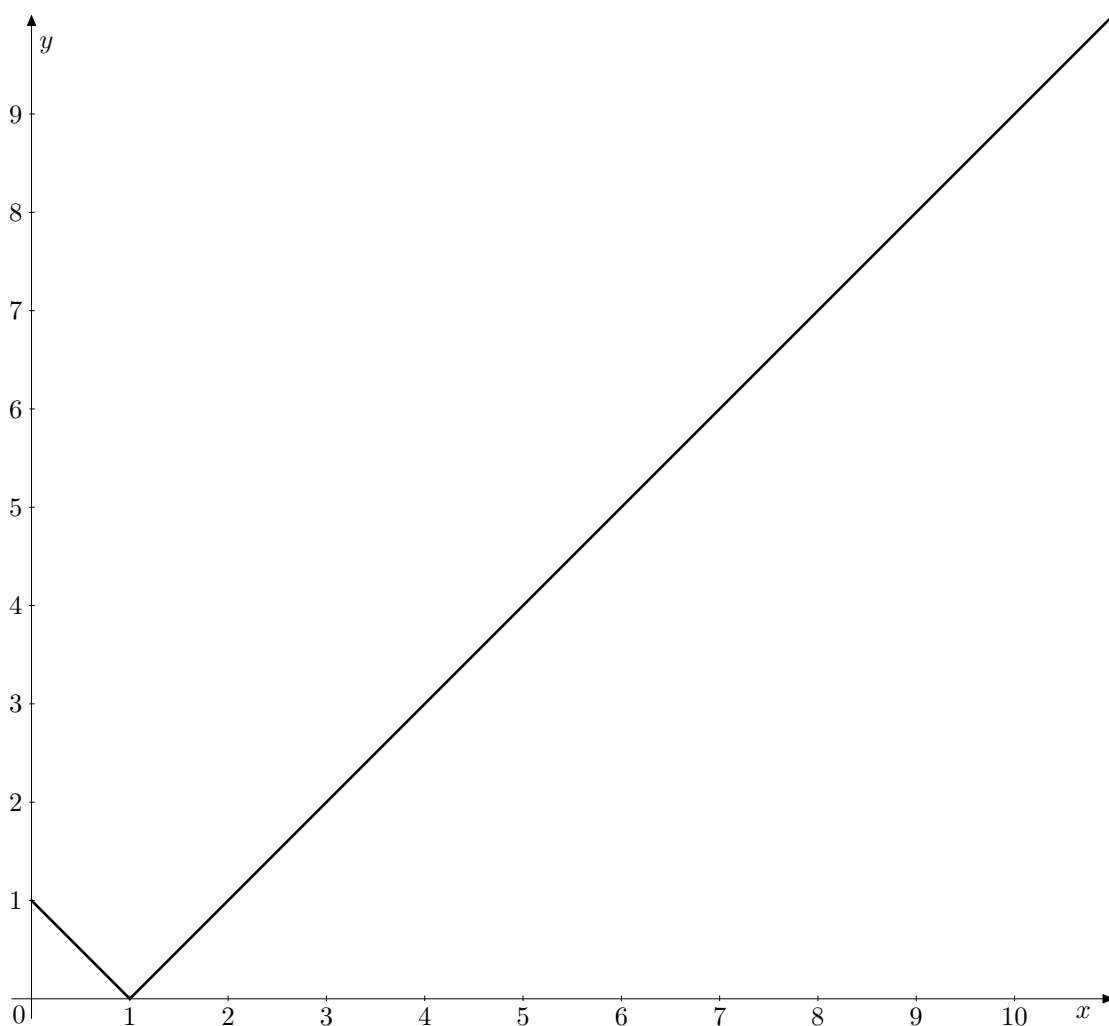
KOŁOKWIUM nr 4, 19.03.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 7. (10 punktów)**

Niech $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ oraz $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

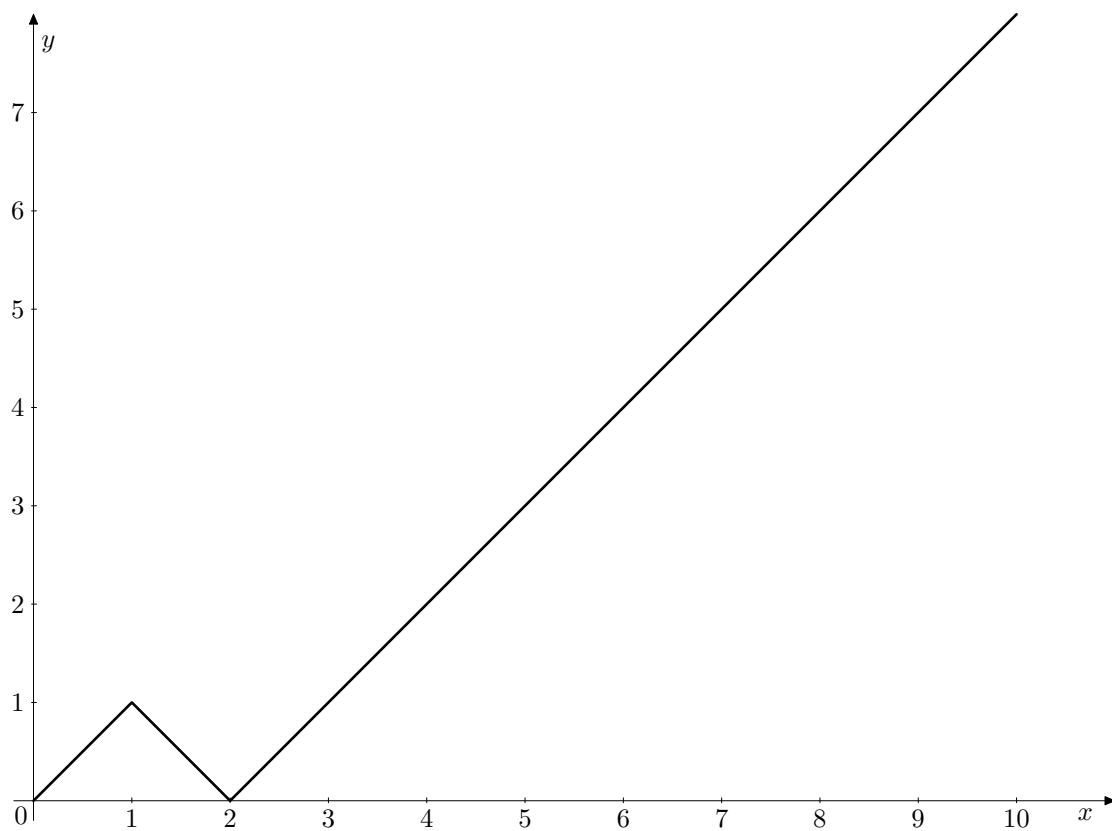
$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

Rozwiązanie:

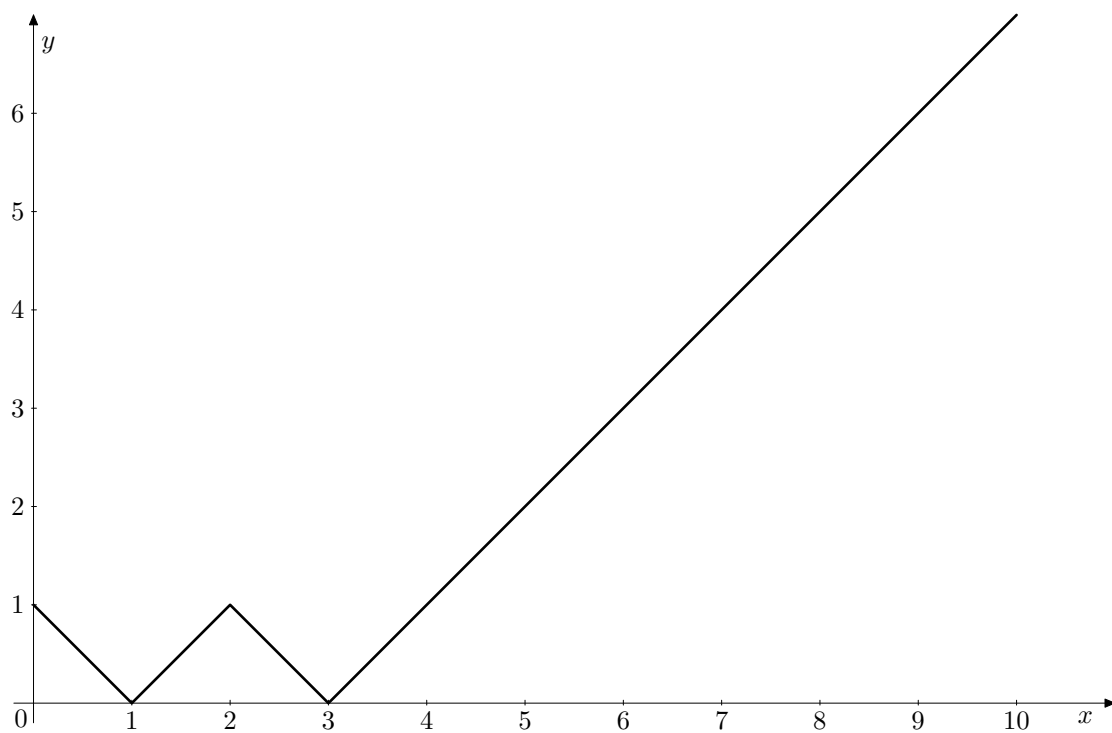
Zauważmy, że $f_1(x) = |x - 1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1 \circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX . Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



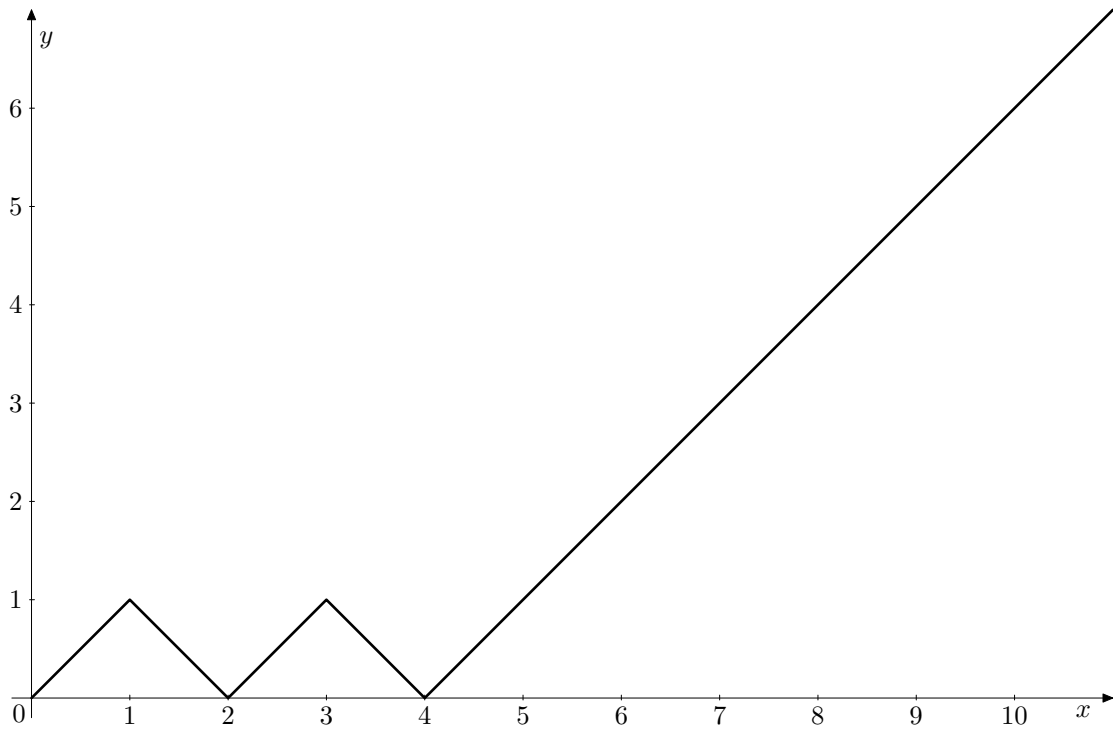
rys. 1



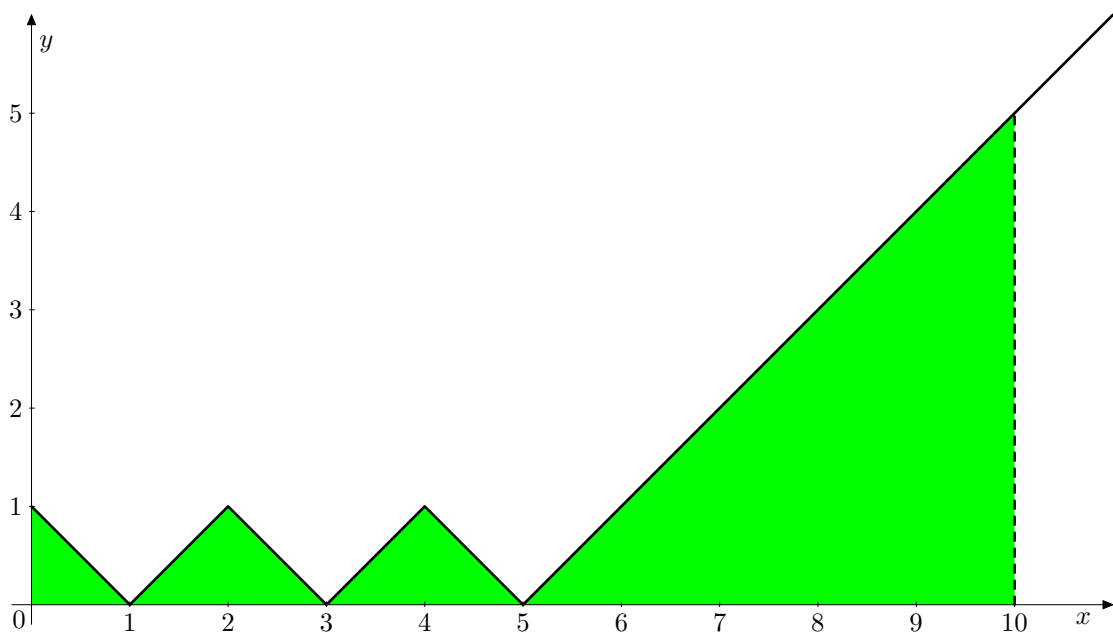
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{25}{2} = 15.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

Zadanie 8. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 3x} dx.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 3x} = \frac{x^2 + x - 3}{x \cdot (x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3},$$

$$x^2 + x - 3 = Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx,$$

$$\begin{cases} 1 &= A + B, \\ 1 &= C, \\ -3 &= 3A, \end{cases}$$

skąd

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 1$$

i w konsekwencji

$$\frac{x^2 + x - 3}{x \cdot (x^2 + 3)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 3}.$$

Kontynuujemy obliczenia wykonując po drodze w jednej z całek podstawienie $x = t\sqrt{3}$, czyli $t = x/\sqrt{3}$ i formalnie $dx = \sqrt{3} dt$:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 3x} dx &= \int_1^3 -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 3} dx = -\int_1^3 \frac{1}{x} dx + \int_1^3 \frac{2x}{x^2 + 3} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \\ &= -\ln x \Big|_{x=1}^3 + \ln(x^2 + 3) \Big|_{x=1}^3 + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3t^2 + 3} dt = \\ &= -\ln 3 + \ln 1 + \ln 12 - \ln 4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} (1/\sqrt{3})) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.