

KOŁOKWIUM nr 51, 6.03.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 51.** (10 punktów)

Sprowadzić całkę

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n}$$

do całki I_{n-1} . Liczba całkowita n jest większa od 1.*Rozwiązanie:*

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n} = \int \frac{x^8 + 1 - x^8}{(x^8 + 1)^n} dx = \int \frac{x^8 + 1}{(x^8 + 1)^n} dx - \int x \cdot \frac{x^7}{(x^8 + 1)^n} dx = \\ &= I_{n-1} - x \cdot \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} + \int \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} dx = \\ &= I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{8(n-1)} \cdot I_{n-1} = \frac{8n-9}{8n-8} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Zadanie 52. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx.$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx &= \int \frac{16x^4 - x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx = 16 \cdot \int \frac{x^4}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 1)^5} dx = \\ &= 16 \cdot \int x \cdot \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= 16 \cdot x \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} - 16 \cdot \int 1 \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + \int \frac{1}{(x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + C. \end{aligned}$$