

KOŁOKWIUM nr 52, 13.03.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 53. (10 punktów)**

Funkcja jednokrotnie różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest trzykrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a jej pochodna trzeciego rzędu jest dana wzorem

$$f'''(x) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^3}{dx^3} (x^3/6) = 1,$$

a funkcjami o trzeciej pochodnej równej 0 są funkcje kwadratowe i liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + Ax^2 + Bx + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^3}{6} + Dx^2 + Ex + F & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x = 0$, czyli musi zachodzić równość $C = F$. Analogicznie różniczkowalność funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości pochodnych pierwszego rzędu dla $x = 0$, czyli musi zachodzić równość $B = E$.

Zatem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + Ax^2 + Bx + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^3}{6} + Dx^2 + Bx + C & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Warunki $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-4/3 + 4A - 2B + C = 0, \quad (\clubsuit)$$

$$-1/6 + A - B + C = 0, \quad (\diamond)$$

$$1/6 + D + B + C = 0, \quad (\heartsuit)$$

$$4/3 + 4D + 2B + C = 0. \quad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań $(\clubsuit)$, $(\diamond)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ prowadzi do

$$A = 1/2, \quad B = 1/3, \quad C = 0, \quad D = -1/2.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(3) = 1$.

Zadanie 54. (20 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx = \\ &= \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16) \cdot (x^2 - 1)} dx = \\ &= \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16)} dx = \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^4 - 65x^2 + 64$ i formalnie $dt = 2(2x^3 - 65x) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+720)} = \frac{1/720}{t} - \frac{1/720}{t+720},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)} &= \frac{1}{1440} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+720} dt = \frac{1}{1440} \cdot (\ln |t| - \ln |t+720|) + C = \\ &= \frac{1}{1440} \cdot (\ln |x^4 - 65x^2 + 64| - \ln |x^4 - 65x^2 + 784|) + C. \end{aligned}$$

Inna postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot (\ln |x^2 - 1| + \ln |x^2 - 64| - \ln |x^2 - 16| - \ln |x^2 - 49|) + C.$$

Jeszcze inna postać odpowiedzi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1440} \cdot (\ln |x-1| + \ln |x+1| + \ln |x-8| + \ln |x+8| - \\ & - \ln |x-4| - \ln |x+4| - \ln |x-7| - \ln |x+7|) + C. \end{aligned}$$

I jeszcze taka postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot \ln \left| \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-8) \cdot (x+8)}{(x-4) \cdot (x+4) \cdot (x-7) \cdot (x+7)} \right| + C.$$