

KOŁOKWIUM nr 53, 20.03.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 55. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \log_2(5^x + 3).$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^x \cdot \ln 5}{5^x + 3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^x \cdot (\ln 5)^2}{5^x + 3} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{5^{2x} \cdot (\ln 5)^2}{(5^x + 3)^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{3 \cdot 5^x \cdot (\ln 5)^2}{(5^x + 3)^2} > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.Ponieważ $f(1) = 3$ oraz $f(3) = 7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1, 3)$ i $(3, 7)$. Wobec tego $f(x) < 2x + 1$ dla $x \in (1, 3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx < \int_1^3 2x + 1 dx = 10.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

Zadanie 56. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześciątów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} dx.$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x = t^6 - 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 - 6t^2 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} dx &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2 \cdot (6t^5 - 6t^2) dt = \int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7 - 6t^4 dt = \left. \frac{3t^8}{4} - \frac{6t^5}{5} \right|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}} = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{12 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} - \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x = t^6 + 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 + 6t^2 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} dx &= \int_{-1}^0 t^2 \cdot (6t^5 + 6t^2) dt = \int_{-1}^0 6t^7 + 6t^4 dt = \left. \frac{3t^8}{4} + \frac{6t^5}{5} \right|_{t=-1}^0 = \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1} dx = \left. \frac{3 \cdot (x-1)^{4/3}}{4} \right|_{x=0}^1 = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20} - \frac{3}{4} + \frac{9}{20} \right) = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40}$.