

**KOŁOKWIUM nr 54, 27.03.2018, godz. 17:15–18:00****Zadanie 57. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right)^k}{\left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n}\right)^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych  $k$  i  $m$ , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości  $n^{3/2}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/2}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości  $n^{4/3}$ , gdyż mamy tam  $n$  składników, a większość z nich jest rzędu  $n^{1/3}$ .

Zauważmy, że

$$n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Ponieważ funkcja  $g$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału  $[0, 1]$  na  $n$  przedziałów równej długości  $1/n$  dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{4}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{3k/2-4m/3} \cdot \frac{\left(n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} \right) = \frac{(2/3)^k}{(3/4)^m},$$

o ile  $3k/2 = 4m/3$ , czyli  $k = 8$  i  $m = 9$ .

Dla tych wartości  $k$  i  $m$  szukana granica jest równa

$$\frac{2^8 \cdot 4^9}{3^8 \cdot 3^9} = \frac{2^{26}}{3^{17}}.$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu granica ciągu jest równa  $2^{26}/3^{17}$  dla  $k = 8$  i  $m = 9$ .

**Zadanie 58. (10 punktów plus ewentualna premia)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4} dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez  $f$  funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot (x^2+4)^{-2/3}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot (x^2+4)^{-2/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \frac{2x^2+8}{3} \cdot (x^2+4)^{-5/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \\ &= \frac{6x^2+24-8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \frac{24-2x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} < 0, \quad \text{o ile} \quad x^2 > 12, \end{aligned}$$

skąd wynika, że funkcja  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[\sqrt{12}, +\infty)$  zawierającym interesujący nas przedział całkowania  $[10, 12]$ .

Ponieważ  $f(11) = 5$ , wykres funkcji  $f$  w przedziale całkowania leży poniżej<sup>1</sup> stycznej do wykresu w punkcie  $(11, 5)$ . Wobec tego

$$f(x) < 5 + f'(11) \cdot (x - 11) \quad \text{dla} \quad x \in (10, 12)$$

i w konsekwencji

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4} dx < \int_{10}^{12} 5 + f'(11) \cdot (x - 11) dx = 10.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

**Odpowiedź:** Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

**Uwaga 1:** Bez trudu można wyliczyć, że  $f'(11) = 22/75$  i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to całkiem zbyteczne z matematycznego punktu widzenia. Może to być jednak wskazane ze względów medycznych (większy komfort psychiczny osoby rozwiązującej zadanie).

**Uwaga 2:** Przy pomocy komputera można wyliczyć, że wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa 9,9974.

---

<sup>1</sup>Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie poniżej niej.