

KOŁOKWIUM nr 55, 10.04.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 59. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_6^8 \sqrt{x^3 - 54} dx$$

jest mniejsza czy większa od 34.

*Rozwiązanie:*Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 54}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} \cdot (x^3 - 54)^{-1/2}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3x \cdot (x^3 - 54)^{-1/2} - \frac{9x^4}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} = \\ &= \frac{12x^4 - 648x}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} - \frac{9x^4}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} = \frac{12x^4 - 648x - 9x^4}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} = \\ &= \frac{3x^4 - 648x}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} = \frac{3x \cdot (x^3 - 216)}{4} \cdot (x^3 - 54)^{-3/2} > 0, \quad \text{o ile} \quad x^3 > 216, \end{aligned}$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[6, +\infty)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[6, 8]$.Ponieważ $f(7) = 17$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej¹ stycznej do wykresu w punkcie $(7, 17)$. Wobec tego

$$f(x) > 17 + f'(7) \cdot (x - 7) \quad \text{dla} \quad x \in (6, 8)$$

i w konsekwencji

$$\int_6^8 \sqrt{x^3 - 54} dx > \int_6^8 17 + f'(7) \cdot (x - 7) dx = 34.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 34.**Uwaga:** Bez trudu można wyliczyć, że $f'(7) = 147/34$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to zbędne, gdyż ta wartość nie ma wpływu na otrzymane oszacowanie.

¹Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.

Zadanie 60. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

*Rozwiązanie:**Rozwiązanie błędne:*

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

BŁĘDY:

1° Wykonane podstawienie nie przeprowadza przedziału całkowania $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ na przedział $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$.

2° Uzyskana w wyniku błędnego podstawienia całka niewłaściwa jest rozbieżna. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0.

Sposób I:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = - \int_{\infty}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\
&= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Sposób II:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Korzystamy z równości

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \text{dla } x > 0.$$

Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x dx - \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \\
&= \frac{\pi x^2}{4} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \frac{x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{2} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.