

KOŁOKWIUM nr 56, 17.04.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 61. (10 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 1.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , b_n^3 i b_n^3 otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 b_n^3 b_n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + b_n^3 + b_n^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

Zadanie 62. (10 punktów)

Podać przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = 1.$$

Rozwiązanie:

W nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , b_n^3 i b_n^3 równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n^6 = b_n^3$ i taki warunek musi być spełniony dla każdego n , aby w nierówności z poprzedniego zadania zachodziła równość. Wystarczy przyjąć za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ szereg o sumie 1, np. $a_n^6 = 1/2^n$, skąd

$$a_n = \frac{1}{2^{n/6}} \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{1}{2^{n/3}}.$$

Zadanie 63. (10 punktów)

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 2.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , $8b_n^3$ i $8b_n^3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 \cdot 8b_n^3 \cdot 8b_n^3} \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + 8b_n^3 + 8b_n^3}{3} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{8+8+8}{12} = 2. \end{aligned}$$

Zadanie 64. (10 punktów)

Podać przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = 2.$$

Rozwiązanie:

W nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , $8b_n^3$ i $8b_n^3$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n^6 = 8b_n^3$ i taki warunek musi być spełniony dla każdego n , aby w nierówności z poprzedniego zadania zachodziła równość. Wystarczy przyjąć za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ szereg o sumie 8, np. $a_n^6 = 8/2^n$, skąd

$$a_n = \frac{\sqrt[6]{2}}{2^{n/6}} \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{1}{2^{n/3}}.$$