

KOŁOKWIUM nr 57, 24.04.2018, godz. 17:15–18:00**Zadanie 65. (10 punktów)**

Udowodnić, że dla dowolnego malejącego ciągu (a_n) zbieżnego do 0, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2}$.

Rozwiązanie:

Podzielmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ na bloki wyrazów, za miejsca podziału wybierając wyrazy o indeksach będących kwadratami liczb całkowitych. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i,$$

a przy tym zachodzą nierówności

$$\sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \leq ((n+1)^2 - n^2) \cdot a_{n^2} = (2n+1) \cdot a_{n^2}$$

oraz

$$\sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \geq ((n+1)^2 - n^2) \cdot a_{(n+1)^2} = (2n+1) \cdot a_{(n+1)^2}.$$

W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot a_{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2n+n) \cdot a_{n^2} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot a_{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) \cdot a_{n^2} \geq \sum_{n=2}^{\infty} (2n-n) \cdot a_{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a_{n^2}.$$

Powyższe nierówności są prawdziwe także w przypadku, gdy występujące w nich sumy szeregów mają wartość $+\infty$.

Na koniec zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \leq a_1 + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2} \leq 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} a_i \geq a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a_{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2}.$$

Udowodniliśmy więc oszacowania

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2},$$

z których wynika teza zadania.

Zadanie **66.** (10 punktów)

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot x^n}{\ln n}$.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \ln n}{\binom{2n}{n} \cdot x^n \cdot \ln(n+1)} \right| &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|}{(n+1)^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot 2 \cdot |x|}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1) - \ln \frac{n+1}{n}}{\ln(n+1)} = \frac{(2n+1) \cdot 2 \cdot |x|}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln(n+1)}\right) \rightarrow 4 \cdot |x| \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $4 \cdot |x|$.

Jeżeli $|x| < 1/4$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $|x| > 1/4$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $1/4$.

Dla $x = 1/4$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n \cdot \ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot \ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+n) \cdot \ln n} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} = +\infty.$$

Wykorzystaliśmy tu nierówność

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$$

wynikającą z tego, że w sumie

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

występuje $2n+1$ składników dodatnich, a największym z nich jest $\binom{2n}{n}$.

Dla $x = -1/4$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (-1)^n}{4^n \cdot \ln n},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Dowodzimy tego w oparciu o nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$ korzystając z twierdzenia o trzech ciągach:

$$0 < \frac{\binom{2n}{n}}{4^n \cdot \ln n} < \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0.$$

Nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$ wynika z tego, że w sumie

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

występuje $2n+1$ składników dodatnich, a jednym z nich jest $\binom{2n}{n}$.

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Wykazujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n \cdot \ln n} \geq \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1} \cdot \ln(n+1)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &\geq \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{4 \cdot (n+1)^2}, \\ \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &\geq \frac{2n+1}{2n+2}, \end{aligned}$$

a to jest prawdą, gdyż

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} > 1 > \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Stąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x = -1/4$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1/4, 1/4)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy $1/4$.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x = 1/4$ i zbieżny dla $x = -1/4$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg jest rozbieżny dla $x = 1/4$ i zbieżny dla $x = -1/4$, to jego promień zbieżności jest równy $1/4$.