

KOŁOKWIUM nr 58, 8.05.2018, godz. 17:15–18:15**Zadanie 67. (10 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) i (d_n) o wyrazach dodatnich, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^7$ i $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{42}$ są zbieżne.
Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla 21 liczb a_n^2 , 14 liczb b_n^3 , 6 liczb c_n^7 i jednej liczby d_n^{42} otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[42]{a_n^{42} b_n^{42} c_n^{42} d_n^{42}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{21a_n^2 + 14b_n^3 + 6c_n^7 + d_n^{42}}{42} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^7 + \frac{1}{42} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{42} < +\infty. \end{aligned}$$

Zadanie 68. (20 punktów + ewentualna premia)

Podać (wraz z uzasadnieniem poprawności) przykład takich ciągów (a_n) , (b_n) , (c_n) i (d_n) o wyrazach dodatnich, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^7$ i $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{43}$ są zbieżne, ale szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n$$

jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n = \frac{1}{n^{903/1805}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{602/1805}}, \quad c_n = \frac{1}{n^{258/1805}}, \quad d_n = \frac{1}{n^{42/1805}}.$$

Wówczas szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^7 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{43} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1806/1805}}$$

są zbieżne (bo $1806/1805 > 1$), ale szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1805/1805}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (jako szereg harmoniczny).

Zadanie 69. (20 punktów + ewentualna premia)

Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} dx \quad \text{czy} \quad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} dx \quad ?$$

Rozwiązanie:

Niech

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}.$$

Wówczas $f(1) = g(1) = 2$ oraz $f(2) = g(2) = 1$, a co więcej funkcje f i g są na przedziale $[1, 2]$ malejące i odwrotne do siebie.

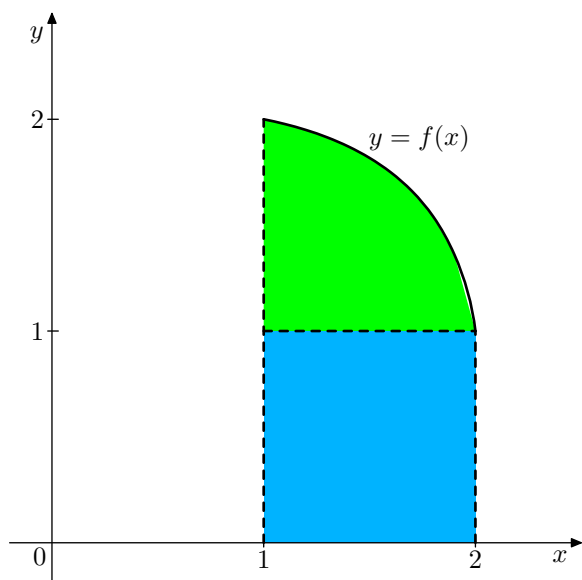
Całka

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} dx = \int_1^2 f(x) dx$$

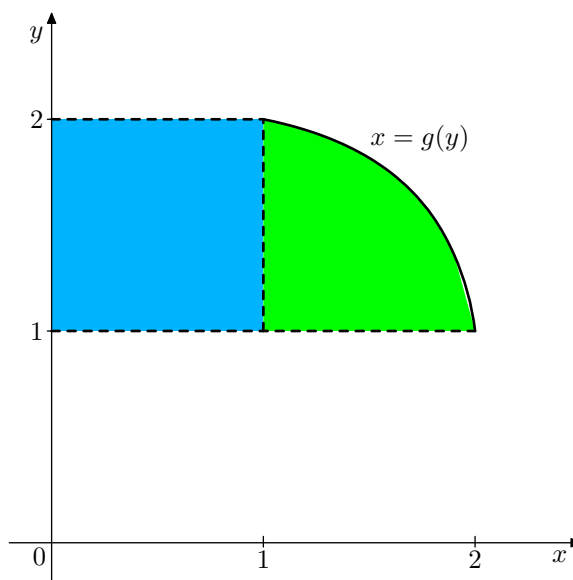
jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanej na rysunku 1.



rys. 1



rys. 2

Z kolei całka

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7y^4}{15}} dy = \int_1^2 g(y) dy$$

jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq g(y)\}$$

zamalowanej na rysunku 2.

Ponieważ każda z tych figur składa się z kwadratu jednostkowego (niebieskiego) oraz tego samego trójkąta krzywoliniowego (zielonego), pola obu figur są równe.

Odpowiedź: Podane całki są równe.