

KOŁOKWIUM nr 59, 15.05.2018, godz. 17:15–18:15**Zadanie 70. (10 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$ jest rozbieżny. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[7]{m}} & \text{dla } r=1, \\ -\frac{1}{\sqrt[7]{m}} & \text{dla } r=2,3. \end{cases}$$

Powyższy ciąg prowadzi do następujących szeregów:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 2 - 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt[7]{2}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{2}{\sqrt[7]{3}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \frac{2}{\sqrt[7]{4}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4}} \dots = \\ &= (2 - 1 - 1) + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{2}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2}} - \frac{1}{\sqrt[7]{2}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{3}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3}} - \frac{1}{\sqrt[7]{3}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[7]{4}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4}} - \frac{1}{\sqrt[7]{4}} \right) \dots = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Odnotujmy, że wobec $a_n \rightarrow 0$ możemy najpierw sumować po trzy kolejne wyrazy szeregu, a potem dodawać otrzymane sumy.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^7 &= 2^7 - 1 - 1 + \frac{2^7}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2^7}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2^7}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \dots = \\ &= (128 - 1 - 1) + \left(\frac{128}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{128}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{128}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \dots = \\ &= 126 + \frac{126}{2} + \frac{126}{3} + \frac{126}{4} + \dots = 126 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \quad (\text{szereg harmoniczny}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^9 &= 2^9 - 1 - 1 + \frac{2^9}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} + \frac{2^9}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} + \frac{2^9}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} \dots = \\ &= (512 - 1 - 1) + \left(\frac{512}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} - \frac{1}{2^{9/7}} \right) + \left(\frac{512}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} - \frac{1}{3^{9/7}} \right) + \left(\frac{512}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} - \frac{1}{4^{9/7}} \right) \dots = \\ &= 510 + \frac{510}{2^{9/7}} + \frac{510}{3^{9/7}} + \frac{510}{4^{9/7}} + \dots = 510 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/7}} < +\infty. \quad (\text{bo } 9/7 > 1) \end{aligned}$$

Zadanie 71. (10 punktów)

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ oraz $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$. Zakładając pełną beztróskę w manipu-

lowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} \pi & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

Zadanie 72. (20 punktów + ewentualna premia)

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego,

w której na przemian występują trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{8} + \dots$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co czwartą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{4n} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^3 f(x) dx = \\ &= \int_1^3 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2} \Bigg|_{x=1}^3 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 12}{2}.$$

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $\ln 2 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 12}{2}$.