

KOŁOKWIUM nr 5, 26.03.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 9. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{(2n+1) \cdot \sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+2) \cdot \sqrt{n+2}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+3) \cdot \sqrt{n+3}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+4) \cdot \sqrt{n+4}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{(4n-2) \cdot \sqrt{3n-2}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n-1) \cdot \sqrt{3n-1}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n) \cdot \sqrt{3n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\left(2 + \frac{k}{n}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

$$\text{gdzie } f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}}.$$

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $2n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \\ = 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6},$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$, z formalnym wzorem $dx = 2t dt$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 3]$ na $t \in [1, \sqrt{3}]$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\pi/6$.

Zadanie 10. (10 punktów)

Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y = x$ i krzywą o równaniu $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $|x| \cdot \sqrt[n]{|x|} \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^{(n+1)/n}$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^{(n+1)/n}) dx = \int_0^1 x^2 - x^{(2n+1)/n} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3n+1)},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^{2(n+1)/n} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^{(3n+2)/n}}{2 \cdot (3n+2)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{n}{2 \cdot (3n+2)} = \frac{1}{3 \cdot (3n+2)},$$

$$P = \int_0^1 x - x^{(n+1)/n} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n} \Bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury Z_n to

$$x_n = \frac{X}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+1)} \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{Y}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+2)}.$$

Wobec tego $x_G = y_G = 4/9$.

Dla bardzo dużych n obszar Z_n jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że $x_G = y_G$** .