

KOŁOKWIUM nr 60, 12.06.2018, godz. 17:15–19:30**Zadanie 73.** (500 punktów do podziału za poprawne rozwiązanie)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-3}^3 \frac{x^3 + x - 1}{1 + \sqrt[5]{x^3 + x} + (x^3 + x)^{2/5} + (x^3 + x)^{3/5} + (x^3 + x)^{4/5}} dx.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę piątych potęg otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \frac{x^3 + x - 1}{1 + \sqrt[5]{x^3 + x} + (x^3 + x)^{2/5} + (x^3 + x)^{3/5} + (x^3 + x)^{4/5}} dx &= \int_{-3}^3 \sqrt[5]{x^3 + x} - 1 dx = \\ &= \int_{-3}^3 \sqrt[5]{x^3 + x} dx - \int_{-3}^3 dx = 0 - 6 = -6, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z zreowania się całki z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa -6 .

Zadanie 74. (500 punktów do podziału za poprawne rozwiązanie)

Obliczyć wartość całki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+7x^2}}{x^3} dx.$$

Rozwiązanie:

Stosując podstawienie

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+7}{x}}, \quad t^3 = 1 + \frac{7}{x}, \quad 3t^2 dt = \frac{-7 dx}{x^2}$$

otrzymujemy

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+7x^2}}{x^3} dx = -\frac{3}{7} \cdot \int_2^1 t \cdot t^2 dt = \frac{3}{7} \cdot \int_1^2 t^3 dt = \frac{3}{28} t^4 \Big|_{t=1}^2 = \frac{45}{28}.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa 45/28.

Zadanie 75. (500 punktów do podziału za poprawne rozwiązania)

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego,

w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co 101-szą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{101n} = \sum_{i=1}^{100n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^{100} f(x) dx = \\ &= \int_1^{100} \frac{dx}{2x} = \frac{\ln |x|}{2} \Bigg|_{x=1}^{100} = \frac{\ln 100}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 100}{2} = \ln 10. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{101n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \ln 10 = \ln 20.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 20$.

Zadanie 76. (500 punktów do podziału za poprawne odpowiedzi)

W każdym z zadań **76.1-76.6** zapisz podaną liczbę używając co najwyżej jednego symbolu funkcji **arctg**.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz $500/\max(6,n)$ punktów, gdzie n jest liczbą poprawnych odpowiedzi udzielonych przez wszystkich piszących, a punktacja za całe zadanie zostanie zaokrąglona do liczby całkowitej.

76.1. $\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 8$

76.2. $\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5 = \operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 18$

76.3. $\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 6 = \operatorname{arctg} \frac{1}{43} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 43$

76.4. $\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$

76.5. $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 13 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3$

76.6. $\operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 8 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3$

Zadanie 77. (231-1001 punktów)

W każdym z zadań **77.1-77.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\binom{n+1}{2} \cdot m$ punktów zaokrąglone do liczby całkowitej, gdzie mnożnik $m \in [1, 13/3]$ zostanie dobrany tak, aby łączna liczba punktów przyznanych za to zadanie wszystkim studentom była możliwie bliska **1001**.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, & B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, & C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n}, \\ D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, & E(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, & F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}. \end{aligned}$$

$$77.1. \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{3}$$

$$77.2. \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$77.3. \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$77.4. \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$77.5. \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$77.6. \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$77.7. \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{11}$$

$$77.8. \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{22}$$

$$77.9. \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{79}$$

$$77.10. \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \frac{\pi}{158}$$

$$77.11. \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \frac{\pi}{316}$$

$$77.12. \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = 0$$

$$77.13. \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$77.14. \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$77.15. \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \frac{\pi}{8097}$$

$$77.16. \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{90\pi}{2699}$$

$$77.17. \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$77.18. \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$77.19. \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = 0$$

$$77.20. \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = 0$$

$$77.21. \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = 0$$
