

KOŁOKWIUM nr 6, 9.04.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 11.** (10 punktów)

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3+x^3}}{\sqrt[3]{0+x^7}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty,$$

bo $5/6 < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11}+0}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty,$$

bo $7/6 > 1$.

Zadanie 12. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x-1) \cdot (x+2).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$5x-2 = A \cdot (x-1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x-1).$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -2 otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=0 \quad -2 = -2A, \quad \text{skąd} \quad A=1,$$

$$\text{dla } x=1 \quad 3 = 3B, \quad \text{skąd} \quad B=1,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -12 = 6C, \quad \text{skąd} \quad C=-2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx &= \int_4^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2| \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2|) \right) - \ln 4 - \ln 3 + 2 \cdot \ln 6 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} \right) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 > \ln e = 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln 3 > 1$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane (a więc ocena częściowa musi być mniejsza od 50%, czyli od 5 punktów).