

KOŁOKWIUM nr 7, 16.04.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 13. (10 punktów)**

Obliczyć długość krzywej

$$\{(x, x^{3/2}) : x \in [0, 13]\}.$$

Zapisać wynik w postaci liczby całkowitej.

*Rozwiązanie:*Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 13]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx &= \int_0^{13} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^{13} \sqrt{1+\frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x + 1\right)^{3/2}}{27} \Bigg|_{x=0}^{13} = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{9 \cdot 13 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{117 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{121}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{1331}{8} - 1\right) = \frac{1331 - 8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350 - 27}{27} = \frac{\frac{2700}{2} - 27}{27} = \frac{100}{2} - 1 = 49. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.

Zadanie 14. (5+5=10 punktów)

a) Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę sześcianów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+n)^{2/3} + n \cdot (n^3+n)^{1/3} + n^2} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+7n^3)^{2/3} + n \cdot (n^3+7n^3)^{1/3} + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 2n^2 + n^2} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

b) Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+n} + n) \cdot (\sqrt{n^4+n} + n^2)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+0} + n) \cdot (\sqrt{n^4+0} + n^2)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.