

KOŁOKWIUM nr 8, 23.04.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 15.** (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{n^2 - n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n^2 + n}} \right).$$

Zapisać wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Zapisując dany szereg w postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(n-1) \cdot n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n \cdot (n+1)}} \right)$$

zauważamy, że odjemnik różnicy występującej w wyrazie szeregu jest odjemną różnicy występującej w wyrazie następnym.

Możemy więc przekształcić N -tą sumę częściową danego szeregu:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(n-1) \cdot n}} - \sqrt{1 + \frac{16}{n \cdot (n+1)}} \right) = \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{16}{1 \cdot 2}} - \sqrt{1 + \frac{16}{2 \cdot 3}} \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{2 \cdot 3}} - \sqrt{1 + \frac{16}{3 \cdot 4}} \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{3 \cdot 4}} - \sqrt{1 + \frac{16}{4 \cdot 5}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-3) \cdot (N-2)}} - \sqrt{1 + \frac{16}{(N-2) \cdot (N-1)}} \right) + \\ &\quad + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-2) \cdot (N-1)}} - \sqrt{1 + \frac{16}{(N-1) \cdot N}} \right) + \\ &\quad + \left(\sqrt{1 + \frac{16}{(N-1) \cdot N}} - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}} \right) = \\ &= \sqrt{1 + \frac{16}{1 \cdot 2}} - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}} = 3 - \sqrt{1 + \frac{16}{N \cdot (N+1)}}, \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3 - 1 = 2$.**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 2.

Zadanie 16. (10 punktów – 2 za promień i po 4 za każdy koniec)

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot x^n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}.$$

*Rozwiązanie:*Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (2n+9) \cdot x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n+5)} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot x^n} \right| &= \\ &= \frac{n \cdot (2n+9) \cdot |x|}{(n+5) \cdot (2n+1)} \rightarrow |x| \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $|x|$.Jeżeli $|x| < 1$, to szereg jest zbieżny.Jeżeli zaś $|x| > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy 1.

Dla $x = 1$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+0) \cdot (2n+0) \cdot (2n+0) \cdot (2n+0)}{n \cdot (n+n) \cdot (n+2n) \cdot (n+3n) \cdot (n+4n)} = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

Dla $x = -1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (-1)^n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{7}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} \geq \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7) \cdot (2n+9)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n+5)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n} &\geq \frac{2n+9}{n+5}, \\ (2n+1) \cdot (n+5) &\geq (2n+9) \cdot n, \\ 2n^2 + 11n + 5 &\geq 2n^2 + 9n, \\ 2n + 5 &\geq 0, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x = -1$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1, 1)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy 1.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x = 1$ i zbieżny dla $x = -1$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg jest rozbieżny dla $x = 1$ i zbieżny dla $x = -1$, to jego promień zbieżności jest równy 1.