

KOŁOKWIUM nr 9, 7.05.2018, godz. 8:15–9:00**Zadanie 17. (10 punktów)**

W każdym z zadań **17.1-17.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **max(0, n-4) punktów**.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Wobec tego:

17.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{23/2}$

17.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{21/2}$

17.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{1/2}$

17.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{3/2}$

17.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{1/4}$

$$\mathbf{17.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{5/4}$$

$$\mathbf{17.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{17.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{17.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{17.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{17.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{17.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}) = \mathbf{18}$$

$$\mathbf{17.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{17.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}) = \mathbf{10}$$

Zadanie 18. (10 punktów)

Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*Niech $k=3$. Wówczas

$$f_n^{(k)}(x) = f_n'''(x) = \frac{(n!)^3 \cdot \sin(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n'''\| = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'''\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (1)$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow \frac{1}{27} < 1.$$

Zatem szereg liczbowy (1) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(4)}(x) = \frac{(n!)^4 \cdot \cos(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n^{(4)}\| = \frac{(n!)^4}{(3n)!}. \quad (2)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (2) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^4} = \frac{(n+1)^4}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow +\infty > 1.$$

Zatem ciąg liczbowy (2) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\|f_n^{(4)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.