

Zadania do samodzielnego rozwiązania, część pojawi się na pierwszym wykładzie.

Mogą być dodatkowo omówione na ćwiczeniach 20.02.2018 na wyraźne życzenie studentów.

1. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

3. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = a \cdot f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

5. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz niezerowa liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $g'(x) = f'(ax)$.

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem:

$$6. f'(x) = x^2, \quad D_f = \mathbb{R} \quad 7. f'(x) = 10x^3, \quad D_f = \mathbb{R} \quad 8. f'(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$9. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad D_f = (0, +\infty) \quad 10. f'(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$11. f'(x) = \frac{1}{x^3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad 12. f'(x) = e^{7x}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$13. f'(x) = \sin 66x, \quad D_f = \mathbb{R} \quad 14. f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$15. f'(x) = (x+1)^2, \quad D_f = \mathbb{R} \quad 16. f'(x) = x^2 + 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

17. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 20.02.2018 (grupy 2–3).

Niektóre zadania mogą zostać (prawie) rozwiązane na pierwszym wykładzie.

Zadania należy rozwiązać nie używając znaku całki, ani słowa *całka*¹.

18. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

19. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$.

20. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f'(1) = 0$.

¹Zakaz dotyczy słowa *całka* w sensie matematycznym. Dopuszczalne jest użycie tego słowa w znaczeniu staropolskim, chociaż wydaje się to mało przydatne w rozwiązaniu zadań z tej listy.

21. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

22. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

23. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym spełniony jest warunek $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$.

24. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2018-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2018)}(x) = e^{3x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

25. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2018-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2018)}(x) = \sin^2 x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

26. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

27. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

28. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

29. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

30. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x) \cdot (f(x))^{2018}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

31. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

32. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = e^x \cdot (f(x) + f'(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

33. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$.

34. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$.

35. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = e^x \cdot (x + 1)$.

36. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = e^x \cdot \sin x + x \cdot e^x \cdot \sin x + x \cdot e^x \cdot \cos x$.

37. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = x \cdot e^{x^2}$.

38. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = \frac{\arctg x}{x^2 + 1}$.

39. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \arctg x}$.

40. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in (0, +\infty)$ warunek $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$.

41. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: (0, +\infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$.

42. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: (1, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in (1, +\infty) \setminus \{e\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}$.

43. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in (0, +\infty)$ warunek $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1} + \frac{\arctg x}{x}$.

44. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

45. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f'(x) = x^5 \cdot \sqrt{x^6 + 1}$.

46. Wyznaczyć taką funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f'(x) = x^2 \cdot \cos x^3$, a przy tym $f(0) = 0$. Naszkicować wykres funkcji f .

47. Wyznaczyć taką funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f'(x) = e^x \cdot \cos e^x$, a przy tym $f(0) = 0$. Naszkicować wykres funkcji f .

48. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

49. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i spełniają dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f''(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniającą dodatkowy warunek $f(-1) = f(1) = f(4) = 0$.

50. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \log x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \log x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2018-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2018)}(x) = \log(2018x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.