

Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorki 15,22.05.2018 (grupy 2-3).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

372. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań:

373. $\bar{z} = z^2$ **374.** $\bar{z} = z^{-1}$ **375.** $1+i = z^2$ **376.** $3+4i = z^2$ **377.** $z^2 \bar{z} = 8i$

378. $-3+4i = z^2$ **379.** $z^2 + z = i$ **380.** $z^2 + iz = 1$ **381.** $z = \bar{z} + 1$

382. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ **383.** $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$ **384.** $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ **385.** $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

386. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ **387.** $3|z| \leq |z^2| + 1$ **388.** $|z| = |\bar{z} + 1|$

389. $|z+i| \leq |z-i|$ **390.** $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ **391.** $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

392. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE .

393. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k , aby zachodziła równość $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

a) $m=10, \quad n=1, \quad k = \dots\dots\dots;$

b) $m=15, \quad n=2, \quad k = \dots\dots\dots;$

c) $m=20, \quad n=3, \quad k = \dots\dots\dots;$

d) $m=50, \quad n=4, \quad k = \dots\dots\dots.$

394. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$ taką, że $z^n = z$.

- a) $z = i$, $n = \dots$;
- b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $n = \dots$;
- c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, $n = \dots$;
- d) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $n = \dots$.

395. Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

396. Czy nierówność $|z+1| < |z-4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$;
- b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$;
- c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$;
- d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$?

397. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$;
- b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$;
- c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$;
- d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$?

398. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

- a) $z = 1 + i\sqrt{3}$;
- b) $z = -1 + i\sqrt{3}$;
- c) $z = \sqrt{3} + i$;
- d) $z = -\sqrt{3} + i$?

399. Czy równość $z^{13} = z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = -i$;
- b) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$;
- c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
- d) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$?

400. Czy równość $\bar{z}^{13} = z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \frac{3+4i}{5}$;
- b) $z = \frac{5+8i}{9}$;
- c) $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$;
- d) $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$?

401. Niech $R(m, n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a) $R(2, 3) = 5$;
- b) $R(3, 4) = 6$;
- c) $R(4, 6) = 8$;
- d) $R(3, 6) = 8$?

402. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 13 + 4i$;
- b) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 8 + 8i$;
- c) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 5 + 9i$;
- d) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 7 + 11i$?

403. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

404. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

405. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = z^{-1}$

a) $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

b) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

c) $z = 2 + 3i$

d) $z = 3 + 4i$

406. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = i$

407. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = i$

408. Czy nierówność $|z - 1| < |z - 5|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$

b) $z = 2 + 2i$

c) $z = 3 + 3i$

d) $z = 4 + 4i$

409. Czy nierówność $|z| < |z - 4i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$

b) $z = 2 + 2i$

c) $z = 3 + 3i$

d) $z = 4 + 4i$

410. Czy nierówność $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$

b) $z = 2 + 2i$

c) $z = 3 + 3i$

d) $z = 4 + 4i$

411. Czy nierówność $|z - 7| < |z - 7i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$

b) $z = 2 + 2i$

c) $z = 3 + 3i$

d) $z = 4 + 4i$

412. Czy liczba $(\sqrt{3} + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$

b) $n = 2013$

c) $n = 2014$

d) $n = 2016$

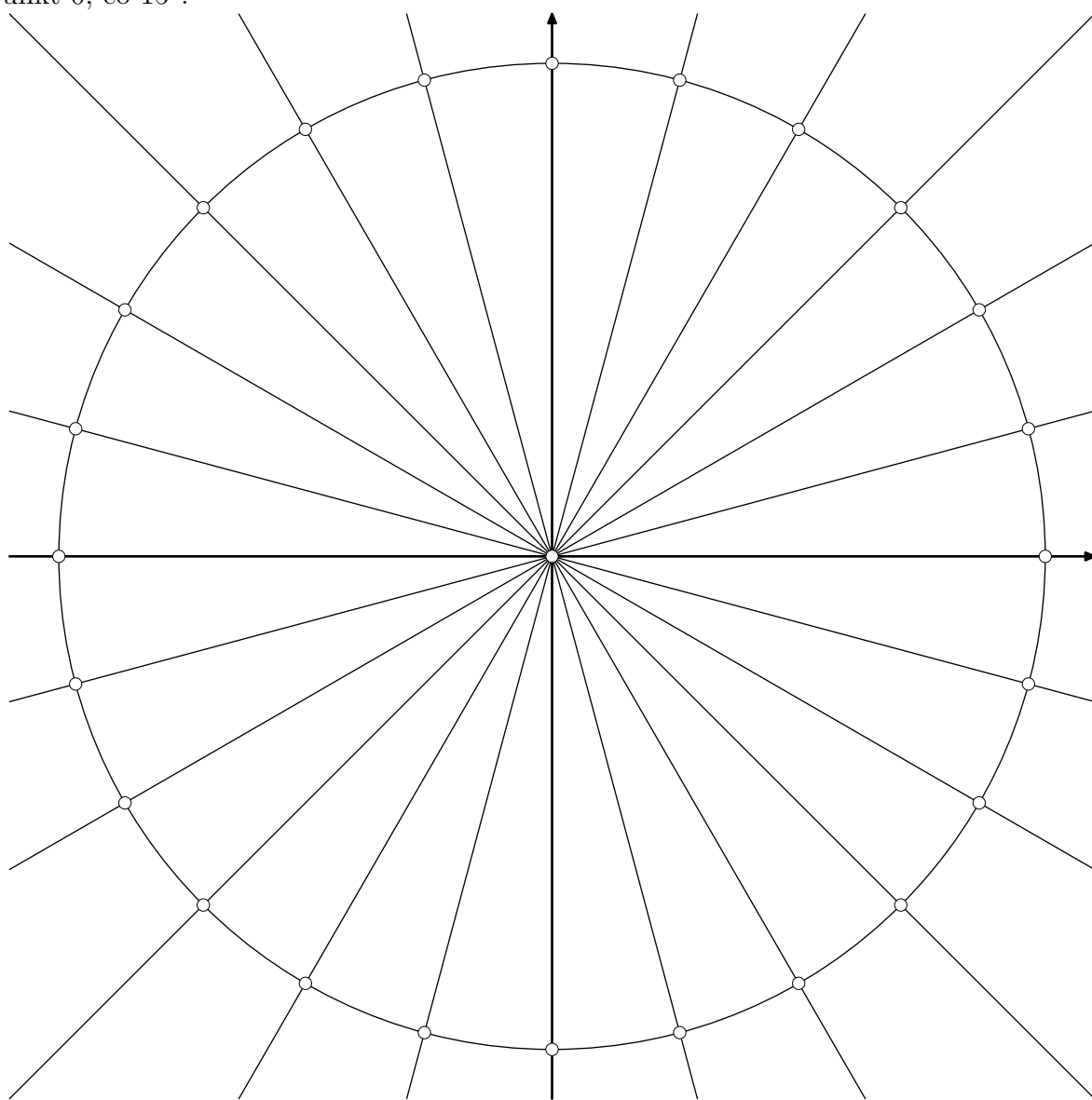
413. Czy liczba $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

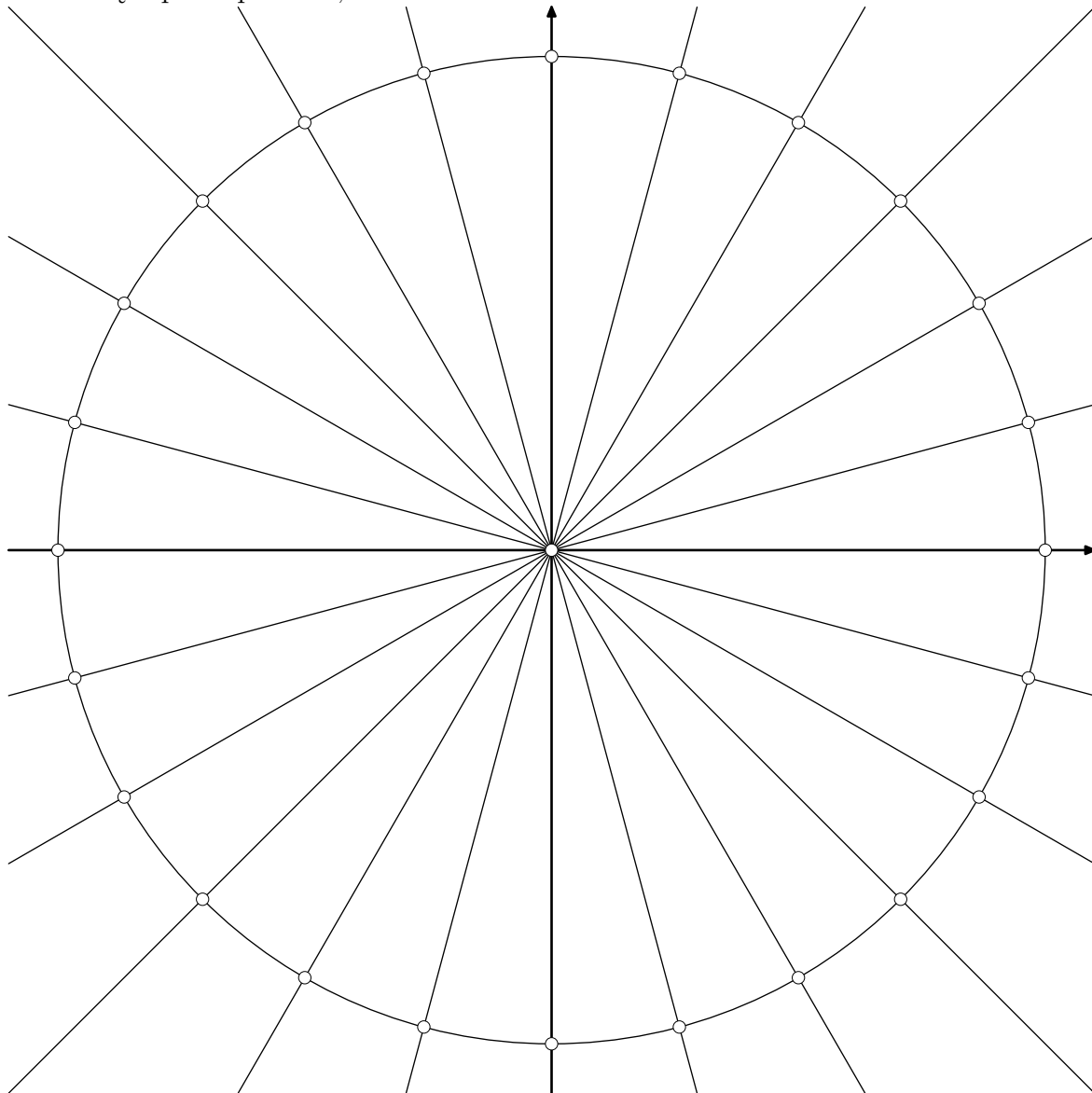
414. Czy liczba $(-1 + i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

415. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27} + z^{16} = z^{24} + z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków " $\pm$ " i " $\pm_2$ " dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



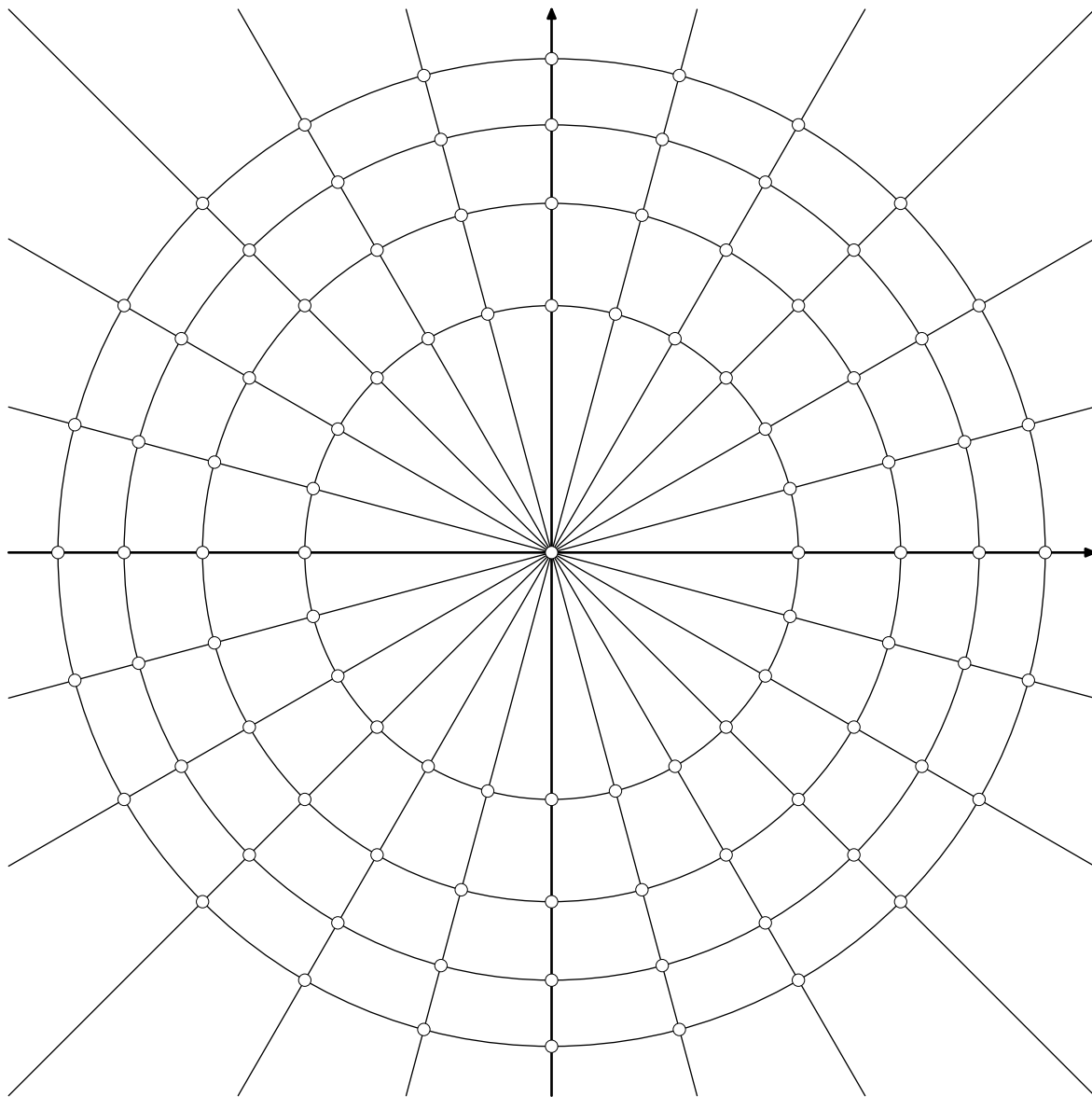
416. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



417. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx$.

418. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\pi} \sin^{2016} x - \cos^{2016} x \, dx$.

419. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



420. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x.$$

421. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem $f(x) = \sin^8 x$.

422. Dokończyć rachunki w przykładzie z wykładu: Obliczyć sumę

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx.$$