

Kolokwium nr 11: poniedziałek 11.06.2018, godz. 9:30-11:00, materiał zad. 1-452.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 29.05.2018 (grupy 2-3).

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R=0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R=+\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

423. Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych dany jest wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + ni} - n.$$

Wyjaśnić, dlaczego powyższa definicja nie jest jednoznaczna i zaproponować możliwe sposoby jej doprecyzowania. Wybrać taki sposób jej doprecyzowania, aby podany ciąg był zbieżny i obliczyć jego granicę.

424. To samo dla ciągu zespolonego danego wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + 2ni} + n.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych:

425. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1}$

426. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i}$

427. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i}$

428. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$

429. Obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej kilka jego początkowych sum częściowych.

Zapisać szeregi (o wyrazach rzeczywistych) części rzeczywistych i urojonych jego wyrazów. Podać sumy tych szeregów (z jednej strony uzyskać je z sumy danego szeregu zespolonego, a z drugiej strony wyliczyć bezpośrednio).

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

430. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$

431. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

432. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$

433. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}}$

434. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$

Poniższe dwa zadania były w znacznej części omówione na wykładzie – przypomnij sobie i uzupełnij co trzeba.

435. Przypomnieć sobie rozwinięcie funkcji rzeczywistej $\arctg$ w szereg potęgowy (wokół zera). Zinterpretować ten szereg jako zespolony szereg potęgowy i wyznaczyć jego obszar zbieżności.

436. Rozważamy zespolony szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}.$$

Wyznaczyć promień zbieżności tego szeregu.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu w punktach $z = e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq k < 2 \cdot 3^m$.

Przyjrzyć się dokładnie przypadkom $(m, k) = (5, 1)$ oraz $(m, k) = (5, 2)$ zaznaczając osiem początkowych (niezerowych) wyrazów szeregu na płaszczyźnie zespolonej.

Wybiórcza powtórka dotychczasowego materiału.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Na ćwiczeniach we wtorki 5.12.06.2018 (grupy 2-3)
należy wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

437. W każdym z zadań **437.1-437.5** podaj wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

437.1.	$f'(x) = (4x - 5)^{54}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	-------------------------	------------	--------------------

$f(x) = \dots\dots\dots$

437.2.	$f'(x) = \sqrt{3x+1}$	$f(1) = 1$	$D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
---------------	-----------------------	------------	--

$f(x) = \dots\dots\dots$

437.3.	$f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^4}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	-------------------------------	------------	--------------------

$f(x) = \dots\dots\dots$

437.4.	$f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$	$f(0) = 7$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	-----------------------------	------------	--------------------

$f(x) = \dots\dots\dots$

437.5.	$f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2+1}$	$f(2) = 0$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	--------------------------------	------------	--------------------

$f(x) = \dots\dots\dots$

438. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}.$$

439. W każdym z zadań **439.1-439.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

439.1. $\int_0^1 x^6 dx = \dots\dots\dots$	439.2. $\int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$
---	---

439.3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$	439.4. $\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \dots\dots\dots$
--	---

439.5. $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = \dots\dots\dots$	439.6. $\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \dots\dots\dots$
--	--

439.7. $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$	439.8. $\int_2^8 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$
---	---

439.9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$	439.10. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$
---	--

440. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^2 \frac{x \, dx}{x^2 + 2x + 4}$.

441. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}}$.

442. W każdym z zadań 442.1-442.10 podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

442.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \dots$

442.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \dots$

442.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \dots$

442.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \dots$

442.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2 + k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \dots$

442.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2 + 1} + \frac{2}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{k}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \dots$

442.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \dots$

442.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + 1} + \frac{n}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \dots$

442.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + 1} + \frac{n}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

442.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

443. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x} \, dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

444. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

445. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności

$$C \cdot \pi^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq 2C \cdot \pi^2.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

446. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

447. W każdym z zadań **447.1-447.15** podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

Przedział może być nieograniczony (tzn. mieć koniec $\pm\infty$).

W zadaniach **447.11-447.15** ujawniono, że przedział jest obustronnie domknięty).

447.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.2. $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-11)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+1}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+n^{3p}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

447.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

447.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot p^n}{n^3}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

447.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{n^{n+4}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

447.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+5}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

447.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+6}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

448. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}$.

449. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

450. W każdym z zadań **450.1-450.4** podaj cztery odpowiedzi.

450.1. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 6, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = 16, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = 1, b = 25, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 6, b = 25, w = \dots\dots\dots$

450.2. Dla podanej liczby a podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną b większą od a , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{6}$.

- a) $a = 1, b = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = \dots\dots\dots$
 c) $a = 3, b = \dots\dots\dots$
 d) $a = 4, b = \dots\dots\dots$

450.3. Dla podanych granic całkowania a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = w \cdot \pi$.

- a) $a = -\infty, b = -1, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = -\infty, b = 0, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = -1, b = +\infty, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 0, b = +\infty, w = \dots\dots\dots$

450.4. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 11} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 4, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = 7, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = 1, b = 8, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 4, b = 8, w = \dots\dots\dots$

451. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}.$$

452. W każdym z zadań **452.1-452.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

452.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

452.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

453. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

454. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

455. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

456. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

457. Wyznaczyć taką liczbę naturalną n , że krzywa o równaniu $y = x^n$ dzieli zbiór

$$\{(x, y) : x \in [0, 1] \wedge x^5 \leq y \leq x\}$$

na dwa obszary o równych polach.

458. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}.$$

459. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}$.

460. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

461. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

462. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

463. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} x \cos x dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

464. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

465. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

466. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

467. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$.

468. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}$.

469. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}.$$

470. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3 + 1} + \frac{4}{n^3 + 8} + \frac{9}{n^3 + 27} + \dots + \frac{k^2}{n^3 + k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3 + 8n^3} \right).$$

471. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

472. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}$.