

437. W każdym z zadań **437.1-437.5** podaj wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

437.1.	$f'(x) = (4x - 5)^{54}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	-------------------------	------------	--------------------

$$f(x) = \frac{(4x - 5)^{55}}{220} + \frac{221}{220}$$

437.2.	$f'(x) = \sqrt{3x + 1}$	$f(1) = 1$	$D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
---------------	-------------------------	------------	--

$$f(x) = \frac{2}{9} \cdot (3x + 1)^{3/2} - \frac{7}{9}$$

437.3.	$f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	---------------------------------	------------	--------------------

$$f(x) = \frac{-1}{6 \cdot (x^2 + 1)^3} + \frac{49}{48}$$

437.4.	$f'(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$	$f(0) = 7$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	-------------------------------	------------	--------------------

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln(x^4 + 1) + 7$$

437.5.	$f'(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2 + 1}$	$f(2) = 0$	$D_f = \mathbb{R}$
---------------	------------------------------------	------------	--------------------

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3x - 5) - \frac{\pi}{12}$$

438. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

co daje

$$t^2 = 1 + \sqrt{1 + x},$$

$$t^2 - 1 = \sqrt{1 + x},$$

$$(t^2 - 1)^2 = 1 + x,$$

$$(t^2 - 1)^2 - 1 = x,$$

$$t^4 - 2t^2 = x$$

i formalnie

$$4 \cdot (t^3 - t) dt = dx.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} &= \int \frac{4 \cdot (t^3 - t) dt}{1 + t} = 4 \cdot \int t^2 - t dt = \frac{4t^3}{3} - 2t^2 + C = \\ &= \frac{4 \cdot \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^3}{3} - 2 \cdot \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^2 + C = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^3}{3} - 2 - 2\sqrt{1 + x} + C = \\ &= \frac{4 \cdot \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^3}{3} - 2\sqrt{1 + x} + C_2. \end{aligned}$$

439. W każdym z zadań **439.1-439.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

439.1. $\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}$

439.2. $\int_0^2 x^3 dx = 4$

439.3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{14}{3}$

439.4. $\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \frac{4}{9}$

439.5. $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = \frac{1}{2}$

439.6. $\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \frac{1}{2}$

439.7. $\int_1^7 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln 5$

439.8. $\int_2^8 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{\ln 13}{2}$

439.9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$

439.10. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{7\pi}{12}$

440. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 4}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 4} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 1 + 3} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{(x + 1)^2 + 3} = \int_{-2}^2 \frac{x dx}{3 \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{3}}, \quad x = t \cdot \sqrt{3} - 1$$

i formalnie

$$dx = \sqrt{3} dt.$$

Ponadto $x = -2$ odpowiada $t = -1/\sqrt{3}$, a $x = 2$ odpowiada $t = \sqrt{3}$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-2, 2]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{x dx}{3 \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3} &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(t \cdot \sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{3} dt}{3 \cdot t^2 + 3} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{t^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \left(\frac{\ln(t^2 + 1)}{2} \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctgt} \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln(4/3)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku nie może pojawić się **arctg**, a π oraz **ln** mogą wystąpić tylko raz.

441. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej, a następnie dzielimy przedział całkowania na dwa przedziały:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}} &= \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{(x+1)^2}} = \int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} = \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} + \int_{-1}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{|x+1|}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{-x-1}} + \int_{-1}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

W pierwszej całce ostatniej sumy wzoru (1) wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{-x-1}, \quad t^2 = -x-1, \quad t \geq 0, \quad x = -t^2 - 1, \quad t \geq 0$$

i formalnie

$$dx = -2t dt.$$

Ponadto $x = -2$ odpowiada $t = 1$, a $x = -1$ odpowiada $t = 0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-2, -1]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 1]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{-x-1}} &= \int_1^0 \frac{-2t dt}{1+t} = -2 \cdot \int_1^0 \frac{t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \cdot \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^1 dt - 2 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2 - 2 \cdot \left(\ln|1+t| \Big|_{t=0}^1 \right) = 2 - 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1) = 2 - 2 \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Z kolei w drugiej całce ostatniej sumy wzoru (1) wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x+1}, \quad t^2 = x+1, \quad t \geq 0, \quad x = t^2 - 1, \quad t \geq 0$$

i formalnie

$$dx = 2t dt.$$

Ponadto $x = -1$ odpowiada $t = 0$, a $x = 8$ odpowiada $t = 3$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-1, 8]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 3]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^8 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} &= \int_0^3 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^3 \frac{t dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^3 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \cdot \int_0^3 1 - \frac{1}{1+t} dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^3 dt - 2 \cdot \int_0^3 \frac{dt}{1+t} = 6 - 2 \cdot \left(\ln|1+t| \Big|_{t=0}^3 \right) = 6 - 2 \cdot (\ln 4 - \ln 1) = 6 - 4 \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $8 - 6 \cdot \ln 2$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku **ln** może wystąpić tylko raz.

442. W każdym z zadań **442.1-442.10** podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

$$\mathbf{442.1.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \ln 3$$

$$\mathbf{442.2.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \ln 3$$

$$\mathbf{442.3.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \ln 3$$

$$\mathbf{442.4.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2+k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \ln 5$$

$$\mathbf{442.5.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2+k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \ln 3$$

$$\mathbf{442.6.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \ln 2$$

$$\mathbf{442.7.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathbf{442.8.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18} \right)$$

$$\mathbf{442.9.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} \right)$$

$$\mathbf{442.10.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

443. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{3x+2}{x^3-4x} = \frac{3x+2}{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2},$$

$$3x+2 = A \cdot x \cdot (x+2) + B \cdot (x-2) \cdot (x+2) + C \cdot (x-2) \cdot x. \quad (2)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (2), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (2) kolejno $x=2$, $x=0$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 8 &= 8A, & \text{skąd} & \quad A = 1, \\ 2 &= -4B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{2}, \\ -4 &= 8C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx &= \int_6^{\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2} dx = \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \Big|_{x=6}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \right) \right) - \ln 4 + \frac{\ln 6}{2} + \frac{\ln 8}{2} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-2 \cdot \ln 4 + \ln 6 + \ln 8}{2} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-4 \cdot \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + 3 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right) + \frac{\ln 3}{2} = \ln 1 + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 3}{2}$.

444. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)! \cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\binom{3n}{n} \cdot n^n}{n! \cdot 18^n} = \frac{(n+1) \cdot 18 \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ & = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{18}{\frac{27}{4} \cdot e} = \frac{8}{3e} = \frac{2, (6)}{e} < 1, \end{aligned}$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności $e > 2, (6)$, która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego $e = 2, 7 \dots$, albo ze wzoru

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

445. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności

$$C \cdot \pi^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq 2C \cdot \pi^2.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie:

Szacujemy dany w zadaniu szereg od dołu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 0 + 0}}{12n^4 + n^4 + 3n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{16n^4} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{48} \cdot \pi^2$$

i od góry:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n^4 + n^4}}{12n^4 + 0 + 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{12n^4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24} \cdot \pi^2.$$

Wobec równości $\frac{1}{24} = 2 \cdot \frac{1}{48}$ udowodniliśmy żądane nierówności ze stałą $C = \frac{1}{48}$.

446. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$ przy założeniu $t \geq 0$, skąd dostajemy formalny wzór $dx = 2t dt$. Przy tym podstawieniu przedziałowi całkowania $x \in (0, \infty)$ odpowiada przedział $t \in (0, \infty)$.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} &= \int_0^{\infty} \frac{2t dt}{t + t^3} = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \cdot \operatorname{arctgt} \Big|_{t=0}^{\infty} = \\ &= 2 \cdot \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctgt} \right) - 2 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość π .

447. W każdym z zadań **447.1-447.15** podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

Przedział może być nieograniczony (tzn. mieć koniec $\pm\infty$).

W zadaniach **447.11-447.15** ujawniono, że przedział jest obustronnie domknięty).

$$\mathbf{447.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (-\infty, -1)$$

$$\mathbf{447.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p^n \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (-1, 1)$$

$$\mathbf{447.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^2} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-1, 1]$$

$$\mathbf{447.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{\sqrt{n}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-1, 1)$$

$$\mathbf{447.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (2, 4)$$

$$\mathbf{447.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2p-11)^n \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (5, 6)$$

$$\mathbf{447.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (2, +\infty)$$

$$\mathbf{447.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^p+1}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (0, +\infty)$$

$$\mathbf{447.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+1} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (1/2, +\infty)$$

$$\mathbf{447.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+n^{3p}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in (1/3, +\infty)$$

$$\mathbf{447.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot p^n}{n^2} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-1/4, 1/4]$$

$$\mathbf{447.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot p^n}{n^3} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-4/27, 4/27]$$

$$\mathbf{447.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{n^{n+4}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-e, e]$$

$$\mathbf{447.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+5}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-e/4, e/4]$$

$$\mathbf{447.15.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+6}} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p \in [-4e/27, 4e/27]$$

$$\mathbf{448.} \quad \text{Obliczyć wartość całki oznaczonej} \int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{4x^5 - 3},$$

czyli

$$t^3 = 4x^5 - 3$$

oraz formalnie

$$3t^2 dt = 20x^4 dx,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnącą, a zatem przedziałowi całkowania $x \in [1, 2]$ odpowiada przedział $t \in [1, 5]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}} &= \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{t^2 dt}{1+t} = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{(t+1) \cdot (t-1) + 1}{1+t} dt = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 t - 1 + \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_{t=1}^5 = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{25}{2} - 5 + \ln 6 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{3}{20} \cdot (8 + \ln 3) = \\ &= \frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}$.

449. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}} \quad (3)$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(2n+2)! \cdot (4n+4)! \cdot x^{pn+p}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{pn+p}} \cdot \frac{n! \cdot n^{pn}}{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}} \right| = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot |x|^p}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} = \\ &= \frac{8 \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3)}{(n+1)^{p-1}} \cdot \frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \rightarrow 2^{10} \cdot \frac{|x|^p}{e^p} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $p-1=4$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (3) równej $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5}$ dla $p=5$.

Jeżeli $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{4}$, to szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{10} \cdot \frac{|x|^5}{e^5} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{4}$, to szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{e}{4}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=5$ promień zbieżności $\frac{e}{4}$.

450. W każdym z zadań **450.1-450.4** podaj cztery odpowiedzi.

450.1. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln w$.

- a) $a=1, b=6, w=3/2$
- b) $a=2, b=16, w=4/3$
- c) $a=1, b=25, w=5/3$
- d) $a=6, b=25, w=10/9$

450.2. Dla podanej liczby a podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną b większą od a , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{6}$.

- a) $a=1, b=2$
- b) $a=2, b=5$
- c) $a=3, b=11$
- d) $a=4, b=29$

450.3. Dla podanych granic całkowania a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = w \cdot \pi$.

- a) $a=-\infty, b=-1, w=1/2$
- b) $a=-\infty, b=0, w=3/4$
- c) $a=-1, b=+\infty, w=1/2$
- d) $a=0, b=+\infty, w=1/4$

450.4. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 11} = \ln w$.

- a) $a=1, b=4, w=3/2$
- b) $a=2, b=7, w=2$
- c) $a=1, b=8, w=5/2$
- d) $a=4, b=8, w=5/3$

451. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}. \quad (4)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (4) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left| \frac{(3n+3)! \cdot x^{n+1}}{(2n+2)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n^n}{(3n)! \cdot x^n} \right| = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot |x|}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (4) równej $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e}$.

Jeżeli $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e} < 1$, czyli $|x| < \frac{4e}{27}$, to szereg (4) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27 \cdot |x|}{4 \cdot e} > 1$, czyli $|x| > \frac{4e}{27}$, to szereg (4) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (4) jest równy $\frac{4e}{27}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4e}{27}$.

452. W każdym z zadań **452.1-452.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

452.1.	$f(x) = 7 \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \ f\ = 7$
452.2.	$f(x) = 7 \sin x - 3, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \ f\ = 10$
452.3.	$f(x) = 7 \sin^2 x - 3, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \ f\ = 4$
452.4.	$f(x) = 7 \sin^3 x - 3, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad \ f\ = 10$
452.5.	$f(x) = \log_2 x - 2, \quad D_f = \left(\frac{1}{8}, 8\right), \quad \ f\ = 5$
452.6.	$f(x) = \log_2 x - 2, \quad D_f = (2, 32), \quad \ f\ = 3$
452.7.	$f(x) = (\log_2 x)^2 - 6, \quad D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \ f\ = 6$
452.8.	$f(x) = (\log_2 x)^3 - 6, \quad D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \ f\ = 33$
452.9.	$f(x) = (\log_2 x)^4 - 6, \quad D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right), \quad \ f\ = 75$
452.10.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 3/2$
452.11.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 4$
452.12.	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 7/3$
452.13.	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 26/3$
452.14.	$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 15/4$
452.15.	$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x, \quad D_f = (1, +\infty), \quad \ f\ = 20$

453. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x^3-9x} &= \frac{2x+3}{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}, \\ 2x+3 &= A \cdot x \cdot (x+3) + B \cdot (x-3) \cdot (x+3) + C \cdot (x-3) \cdot x. \end{aligned} \quad (5)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (5), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (5) kolejno $x=3$, $x=0$, $x=-3$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 9 &= 18A, & \text{skąd} & \quad A = \frac{1}{2}, \\ 3 &= -9B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{3}, \\ -3 &= 18C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx &= \int_5^{\infty} \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/3}{x} - \frac{1/6}{x+3} dx = \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \Bigg|_{x=5}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 8}{6} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 2}{2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3}{1 + \frac{3}{x}}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \ln 1 + \frac{\ln 5}{3} = 0 + \frac{\ln 5}{3} = \frac{\ln 5}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{3}$.

454. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \geq \frac{(2n+1) \cdot (2n+3)}{(3n+2) \cdot (3n+5) \cdot (3n+8)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{3n-1} &\geq \frac{2n+3}{3n+8}, \\ (2n-1) \cdot (3n+8) &\geq (2n+3) \cdot (3n-1), \\ 6n^2 + 13n - 8 &\geq 6n^2 + 7n - 3, \\ 6n &\geq 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

455. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} \, dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1$$

i formalnie

$$dx = 2t \, dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 3]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} \, dx &= \int_1^2 15 \cdot (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t \, dt = 30 \cdot \int_1^2 t^4 - t^2 \, dt = 30 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=1}^2 = \\ &= 30 \cdot \left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3} \right) = 6 \cdot 31 - 10 \cdot 7 = 186 - 70 = 116. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

456. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{(x-1) \cdot x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x},$$

$$1 = A \cdot x^2 + B \cdot (x-1) + D \cdot (x-1) \cdot x,$$

$$1 = Ax^2 + Bx - B + Dx^2 - Dx,$$

$$\begin{cases} 0 &= A + D \\ 0 &= B - D \\ 1 &= -B, \end{cases}$$

skąd $B = -1$, $D = -1$ i $A = 1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C.$$

457. Wyznaczyć taką liczbę naturalną n , że krzywa o równaniu $y = x^n$ dzieli zbiór

$$\{(x, y) : x \in [0, 1] \wedge x^5 \leq y \leq x\}$$

na dwa obszary o równych polach.

Rozwiązanie:

Warunki zadania będą spełnione, jeżeli

$$\int_0^1 x - x^n dx = \int_0^1 x^n - x^5 dx,$$

co możemy przepisać kolejno jako

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x=0}^1 = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{x=0}^1,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{n+1},$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{n+1},$$

$$3 = n+1,$$

$$n = 2.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczbę $n = 2$.

458. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}. \quad (6)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (6) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2n+2)! \cdot x^{2n+2}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{(2n)! \cdot x^{2n}} \right| &= \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^2}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow 4 \cdot \frac{x^2}{e}. \end{aligned}$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (6) równej $4 \cdot \frac{x^2}{e}$.

Jeżeli $4 \cdot \frac{x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (6) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4 \cdot \frac{x^2}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (6) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (6) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

459. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{10}{n}\right)} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10) \cdot (3n+13)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned}\frac{n}{3n+1} &\geq \frac{n+3}{3n+13}, \\ n \cdot (3n+13) &\geq (n+3) \cdot (3n+1), \\ 3n^2 + 13n &\geq 3n^2 + 10n + 3, \\ 3n &\geq 3, \\ n &\geq 1,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

460. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}. \quad (7)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (7) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot x^{4n+4}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}} \right| &= \\ &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |x|^4}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \cdot \frac{x^4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow 16 \cdot \frac{x^4}{e}.\end{aligned}$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (7) równej $16 \cdot \frac{x^4}{e}$.

Jeżeli $16 \cdot \frac{x^4}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (7) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $16 \cdot \frac{x^4}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (7) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (7) jest równy $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

461. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x+1). \quad (8)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (8), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (8) kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 1 &= 2A, & \text{skąd} & \quad A = \frac{1}{2}, \\ 1 &= -B, & \text{skąd} & \quad B = -1, \\ 1 &= 2C, & \text{skąd} & \quad C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \int_1^6 \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \left. \frac{\ln|x|}{2} - \ln|x+1| + \frac{\ln|x+2|}{2} \right|_{x=1}^6 = \\ &= \frac{\ln 6}{2} - \ln 7 + \frac{\ln 8}{2} - \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} - \ln 7 + \frac{3 \cdot \ln 2}{2} - 0 + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \\ &= 3 \cdot \ln 2 - \ln 7 = \ln 8 - \ln 7 = \ln \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln \frac{8}{7}$.

462. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 7]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{4 \cdot (t^3 - 1)}{t^2} 3t^2 dt = 12 \cdot \int_1^2 t^3 - 1 dt = 12 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - t \right) \Big|_{t=1}^2 =$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{16-1}{4} - (2-1) \right) = 12 \cdot \left(\frac{15}{4} - \frac{4}{4} \right) = 12 \cdot \frac{11}{4} = 33.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

463. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = x \cdot \sin x \Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 - 0 - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x = t + \pi$, czyli $t = x - \pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos(t + \pi) \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos t \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt - \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt$ jest równa 0 jako

całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

464. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = x - 1, \quad x = t + 1$$

i formalnie

$$dx = dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=2$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 2]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1, 1]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+1} = \left(\operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\pi}{2}$.

465. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x} &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \ln|x| - \ln|x+1| \Big|_{x=1}^{\infty} = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_{x=1}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \ln \frac{1}{2} = \ln \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

466. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_0^1 \frac{x dx}{x^2-2x+2} = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2-2x+1+1} = \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2+1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = x - 1, \quad x = t + 1$$

i formalnie

$$dx = dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 1]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1, 0]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2+1} &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1) dt}{t^2+1} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^2+1} + \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= \left(\frac{\ln(t^2+1)}{2} \right) \Big|_{t=-1}^0 + \left(\operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=-1}^0 = \\ &= \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \frac{\ln 2}{2} + 0 - \frac{-\pi}{4} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$.

467. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3 \cos 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \cdot \cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3 \sin 3x) \, dx \right) = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot I(x), \end{aligned}$$

co prowadzi do

$$4 \cdot I(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x - 9 \cdot I(x),$$

skąd

$$I(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{13} + C.$$

468. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4}$.

Rozwiązanie:

Dzielać przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} \, dx}{0 + x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4 - \pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + x^4} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} \, dx}{x^5 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5-\pi}} < +\infty,$$

bo $5 - \pi > 1$.

469. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}. \quad (9)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (9) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x .

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n} \right|} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot |x|}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \rightarrow e \cdot |x|.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny do 0 < 1 , a w konsekwencji szereg (9) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty > 1$, a w konsekwencji szereg (9) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (9) jest równy $\frac{1}{e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{e}$.

470. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+8} + \frac{9}{n^3+27} + \dots + \frac{k^2}{n^3+k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3+8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \int_0^2 \frac{3x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3+1| \Big|_{x=0}^2 = \frac{1}{3} \cdot (\ln 9 - \ln 1) = \frac{2 \ln 3}{3}.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

471. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin^{2017} n^{2016}|}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0 + n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty,$$

bo $3/2 > 1$.

472. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(7 - \frac{6}{n}\right) \cdot \left(7 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(5 - \frac{4}{n}\right) \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(5 + \frac{6}{n}\right)} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 0}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} \geq \frac{(7n+1) \cdot (7n+8)}{(5n+1) \cdot (5n+6) \cdot (5n+11)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{7n-6}{5n-4} \geq \frac{7n+8}{5n+11},$$

$$(7n-6) \cdot (5n+11) \geq (7n+8) \cdot (5n-4),$$

$$35n^2 + 77n - 30n - 66 \geq 35n^2 - 28n + 40n - 32,$$

$$35n^2 + 47n - 66 \geq 35n^2 + 12n - 32,$$

$$35n \geq 34,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.