

OSZUSTWO 566. (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$ nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x=0$, po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= -\operatorname{arctg} t \Big|_{1/e}^e = -\operatorname{arctg} e + \operatorname{arctg} \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} e < 0 \end{aligned}$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne:

$$\mathbf{567.} \int_{-2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x} + e^{-2/x} + 2)} dx \quad \mathbf{568.} \int_{-1}^1 \ln|x| dx \quad \mathbf{569.} \int_1^{+\infty} \frac{7x^2 + 8x - 9}{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x} dx$$

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

570. $f(n) = \frac{1}{n}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

571. $f(n) = \frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

572. $f(n) = n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

573. $f(n) = 0$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

574. $f(n) = e^n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

575. $f(n) = 1$, a przy tym $\int_1^{\infty} f(x)dx = 1$ oraz $\int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = 1000$.