

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

576. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

577. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

578. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

579. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

580. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

581. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

582. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

583. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

584. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

585. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

586. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n}} - 4}{8n^4 - 3n^3 + 5}$$

w zależności od parametru naturalnego k .

587. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

588. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

589. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

590. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$.

591. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

592. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$

593. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$

594. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

595. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ jest zbieżny.

596. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ jest zbieżny.

597. Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej g podać przykład ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich spełniającego warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = g.$$

Dla podanych przykładów zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dla jednej wartości g podać dwa przykłady, prowadzące do szeregu zbieżnego i rozbieżnego.

598. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, podaj jego sumę.

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\ \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012} \end{array}$$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. Nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

599. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

600. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

601. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

602. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

603. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n)

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

c) ciągu (b_n)

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

e) ciągu $(a_n + b_n)$

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

g) ciągu $(c_n + d_n)$

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$

i) ciągu $(a_n + c_n)$

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$

k) ciągu $(a_n + d_n)$

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$

m) ciągu $(b_n + c_n)$

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$

o) ciągu $(b_n + d_n)$

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$

604. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

605. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

606. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest rozbieżny.

607. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ jest rozbieżny.

608. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ są zbieżne, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$ są rozbieżne.

609. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot x^n}{n^2}.$$

610. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n.$$

611. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n \cdot x^{3n}}{(81n+2)^n}.$$

612. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n.$$

613. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n.$$

614. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot x^n,$$

gdzie (F_n) jest ciągiem Fibonacciego numerowanym tak, że $F_1 = F_2 = 1$.

615. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

616. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}.$$

617. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)}.$$

Wyliczyć wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.

618. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 4}.$$

Wyliczyć wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.