

619* Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Przyjmując, że można beztrudno różniczkować i całkować występujące w rozwiązaniu szeregi wyraz za wyrazem (co wynika z faktów wykraczających poza materiał prezentowany na wykładzie), wyprowadzić wzór na

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Nie korzystać ze wzoru na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Jako wniosek z rozwiązania wyprowadzić wzór na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

620* Udowodnić, że suma szeregu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \dots,$$

w którym mianowniki to kolejne liczby nieparzyste, a na przemian występują po dwa wyrazy dodatnie i dwa ujemne, jest równa całce $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

$$\mathbf{621.} \quad f(x) = \frac{7x^4 + 11x^2 + 13}{2x^4 + 3x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{622.} \quad f(x) = \frac{11x^4 - 7x^2 + 13}{3x^4 - 2x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{623.} \quad f(x) = \frac{2^x + 5^x + 8^x}{2^x + 4^x + 8^x}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{624.} \quad f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$\mathbf{625.} \quad f(x) = \int_0^x \frac{\sin t \, dt}{t^2 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$\mathbf{626.} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x^4}{n^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{627.} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{n^2}, \quad D_f = (-1/2, 1/2)$$