

641. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5+1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmijemy $n = 4$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[7]{x^5+1},$$

czyli

$$t^7 = x^5 + 1$$

oraz formalnie

$$7t^6 dt = 5x^4 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[7]{x^5+1} dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt[7]{x^5+1} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{5} \int t \cdot 7t^6 dt = \frac{7}{5} \int t^7 dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{7 \cdot t^8}{40} + C = \\ &= \frac{7}{40} \cdot (x^5+1)^{8/7} + C. \end{aligned}$$

642. Wyrazić całkę nieoznaczoną

$$I_n(x) = \int x^n \cdot \sin \sqrt{x} dx$$

za pomocą $I_{n-1}(x)$.

Rozwiązanie:

Przyjęcie we wzorach

$$\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$$

oraz

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$$

funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ prowadzi odpowiednio do

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = -\cos \sqrt{x} + C$$

oraz

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \sin \sqrt{x} + C.$$

W oparciu o powyższe wzory wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części (różniczkując pierwszy czynnik i całkując drugi):

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int x^n \cdot \sin \sqrt{x} dx = 2 \cdot \int x^{n+1/2} \cdot \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= 2 \cdot x^{n+1/2} \cdot (-\cos \sqrt{x}) - 2 \cdot \int \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x^{n-1/2} \cdot (-\cos \sqrt{x}) dx = \\ &= -2 \cdot x^{n+1/2} \cdot \cos \sqrt{x} + (2n+1) \cdot \int x^{n-1/2} \cdot \cos \sqrt{x} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \cdot x^{n+1/2} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \cdot (2n+1) \cdot \int x^n \cdot \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \\
&= -2 \cdot x^{n+1/2} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \cdot (2n+1) \cdot x^n \cdot \sin \sqrt{x} - 2 \cdot (2n+1) \cdot \int n \cdot x^{n-1} \cdot \sin \sqrt{x} dx = \\
&= -2 \cdot x^{n+1/2} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \cdot (2n+1) \cdot x^n \cdot \sin \sqrt{x} - 2n \cdot (2n+1) \cdot I_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= -2 \cdot x^{n+1/2} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \cdot (2n+1) \cdot x^n \cdot \sin \sqrt{x} - 2n \cdot (2n+1) \cdot I_{n-1}(x) = \\
&= -2 \cdot x^n \cdot \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} + 2 \cdot (2n+1) \cdot x^n \cdot \sin \sqrt{x} - 2n \cdot (2n+1) \cdot I_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

643. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}}.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}} = \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot (x+1)^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

i wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x}},$$

czyli

$$t^5 = 1 + \frac{1}{x},$$

$$t^5 - 1 = \frac{1}{x}$$

oraz formalnie

$$5t^4 dt = -\frac{dx}{x^2}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}} &= -\int \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-dx}{x^2} = -\int \frac{1}{t^2} \cdot 5t^4 dt = -5 \cdot \int t^2 dt = -\frac{5 \cdot t^3}{3} + C = \\
&= -\frac{5}{3} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}} \right)^3 + C.
\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}} = -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)^{3/5} + C.$$

644. W każdym z zadań **644.1-644.13** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$\mathbf{644.1.} \quad \int_{-1}^1 x^3 \cdot \sqrt{1-x^2} dx = 0$$

$$\mathbf{644.2.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{644.3.} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \pi$$

$$\mathbf{644.4.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} - |x| dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{644.5.} \quad \int_{-1}^1 |x| dx = 1$$

$$\mathbf{644.6.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\mathbf{644.7.} \quad \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$$

$$\mathbf{644.8.} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx = \pi + 2$$

$$\mathbf{644.9.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\mathbf{644.10.} \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\mathbf{644.11.} \quad \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{644.12.} \quad \int_0^6 \sqrt{6x-x^2} dx = \frac{9\pi}{2}$$

$$\mathbf{644.13.} \quad \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx = \frac{\pi}{8}$$

645. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_{-1}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{(x+2)^2} dx$.
Zapisać wynik jako liczbę wymierną.

Rozwiązanie:

Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0, podzielimy więc przedział całkowania na dwa przedziały, a w każdej z tak otrzymanych całek wykonamy podstawienie $t = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}$, które prowadzi do następujących obliczeń:

$$t^3 = 1 + \frac{2}{x}, \quad 3t^2 dt = -\frac{2 dx}{x^2}, \quad \frac{1}{t^3} = \frac{x}{x+2}, \quad \left(\frac{1}{t^3}\right)^2 \cdot 3t^2 dt = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \cdot \frac{2 dx}{x^2},$$

$$\frac{3 dt}{t^4} = -\frac{2 dx}{(x+2)^2}, \quad -\frac{3 dt}{2 \cdot t^4} = \frac{dx}{(x+2)^2},$$

$$x \in (-1, 0) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow \frac{2}{x} \in (-\infty, -2) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3 \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow t \in (-\infty, -1),$$

$$x \in \left(0, \frac{1}{13}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in (13, \infty) \Leftrightarrow \frac{2}{x} \in (26, \infty) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} \in (27, \infty) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3 \in (27, \infty) \Leftrightarrow t \in (3, \infty),$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2} dx + \int_0^{1/13} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x}}}{(x+2)^2} dx = \\
& = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{\frac{x+2}{x}} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2} + \int_0^{1/13} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x}} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2} = \int_{-1}^{-\infty} -\frac{3t dt}{2 \cdot t^4} + \int_{\infty}^3 -\frac{3t dt}{2 \cdot t^4} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{3 dt}{2 \cdot t^3} + \int_3^{\infty} \frac{3 dt}{2 \cdot t^3} = \\
& = \left(-\frac{3}{4 \cdot t^2} \Big|_{t=-\infty}^{-1} \right) + \left(-\frac{3}{4 \cdot t^2} \Big|_{t=3}^{\infty} \right) = -\frac{3}{4 \cdot (-1)^2} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{3}{4 \cdot t^2} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{4 \cdot t^2} + \frac{3}{4 \cdot (3)^2} = \\
& = -\frac{3}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{12} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $-2/3$.

646. Dane są takie ciągi (a_n) , (b_n) i (c_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = 1$.

Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leq 1$.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n^2 , a_n^2 , a_n^2 , b_n^3 , b_n^3 i c_n^6 otrzymujemy

$$\sqrt[6]{a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot b_n^3 \cdot b_n^3 \cdot c_n^6} \leq \frac{a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + b_n^3 + b_n^3 + c_n^6}{6},$$

czyli

$$a_n b_n c_n \leq \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^3}{3} + \frac{c_n^6}{6}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^3}{3} + \frac{c_n^6}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

647. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrąsko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

648. Dane są takie ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) i (d_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{12} = 1$.

Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n \leq 1$.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, b_n^4, b_n^4, b_n^4, b_n^4, c_n^6, c_n^6$ i d_n^{12} otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sqrt[12]{a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot b_n^4 \cdot b_n^4 \cdot b_n^4 \cdot b_n^4 \cdot c_n^6 \cdot c_n^6 \cdot d_n^{12}} \leq \\ & \leq \frac{a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + b_n^4 + b_n^4 + b_n^4 + b_n^4 + c_n^6 + c_n^6 + d_n^{12}}{12}, \end{aligned}$$

czyli

$$a_n b_n c_n d_n \leq \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^4}{4} + \frac{c_n^6}{6} + \frac{d_n^{12}}{12}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^4}{4} + \frac{c_n^6}{6} + \frac{d_n^{12}}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 + \frac{1}{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{12} = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

649. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n} = \mathbf{6}$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[11]{x^7+1},$$

czyli

$$t^{11} = x^7 + 1$$

oraz formalnie

$$11t^{10} dt = 7x^6 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx & = \frac{1}{7} \int \sqrt[11]{x^7+1} \cdot 7x^6 dx = \frac{1}{7} \int t \cdot 11t^{10} dt = \frac{11}{7} \int t^{11} dt = \frac{11}{7} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \\ & = \frac{11 \cdot t^{12}}{84} + C = \frac{11}{84} \cdot (x^7+1)^{12/11} + C. \end{aligned}$$

650. Funkcja $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \int_1^x (\log_2 t - 3)^{2017} dt.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x) = (\log_2 x - 3)^{2017}$, mamy $f'(x) < 0$ dla $x \in (1, 8)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x > 8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1, 8)$ i rosnąca w przedziale $(8, +\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

651. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m = 8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leq 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{2^{kn} \cdot \text{jakiśsinus } 2^n x}{333^n},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm \sin$, $\pm \cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{kn}}{333^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{333}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{256}{333}\right)^n < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x) = \frac{2^{9n} \cos 2^n x}{333^n} = \left(\frac{512}{333}\right)^n \cdot \cos 2^n x,$$

co dla $x = 0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m = 9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $256/333$ bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie $512/333$ większym od 1.

652. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ też jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a z założeń zadania

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

dostajemy nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$