

242. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$1 = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1),$$

$$1 = Ax + A + Bx - B,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Bez trudu otrzymujemy $A = 1/2$ i $B = -1/2$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \int_3^{\infty} \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \Bigg|_{x=3}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{-\ln 2 + 2 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 2}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

243. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

$$x = A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1),$$

$$x = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 0 &= A-B-D \end{cases}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 0 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=B=1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \Bigg|_{x=2}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$.

Uwaga 1: Całki

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Uwaga 2: Wykonanie w wyjściowej całce podstawienia $t = x^2$ prowadzi do całki z funkcji wymiernej o mianowniku stopnia 2 zamiast 4.

244. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo $3 - e < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo $4 - e > 1$.

245. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + x} &= \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}, \\ 1 &= (Ax + B) \cdot x + C \cdot (x^2 + 1), \\ 1 &= Ax^2 + Bx + Cx^2 + C, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_7^\infty \frac{dx}{x^3+x} &= \int_7^\infty -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^\infty = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\ &= \left(\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$.

246. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^\infty \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}} = \int_0^1 \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}} + \int_1^\infty \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^\pi dx}{\sqrt{0+x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4-\pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+x^8}} \leq \int_1^\infty \frac{x^\pi dx}{\sqrt{x^9+0}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo $4,5-\pi > 1$.