

Kolokwium nr 7: poniedziałek 16.04.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–296.

Kolokwium nr 8: poniedziałek 23.04.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–339.

Szeregi liczbowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorki 10,17.04.2018 (grupy 2–3).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów:

$$247. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad 248. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \quad 249. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1} \quad 250. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

$$251. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47} \quad 252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \quad 253. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

$$254. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \quad 255. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)} \quad 256. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad 257. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$258. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} \quad 259. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad 260. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} \quad 261. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$262. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad 263. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad 264. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \quad 265. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-n}} \quad 266. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$$

$$267. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{10\sqrt[n]{n!}} \quad 268. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} \quad 269. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e} \quad 270. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$$

$$271. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n} \quad 272. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!} \quad 273. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}} \quad 274. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$$

$$275. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+64}-\sqrt{n^3+1}) \quad 276. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1} \quad 277. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}$$

$$278. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n} \quad 279. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n} \quad 280. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}} \quad 281. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad 282. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1).$

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne. Wskazać wśród poniższych przykładów dwa szeregi, jeden zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, drugi rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, o ilorazie wyrazów a_n/b_n dążącym do 1.

$$283. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad 284. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad 285. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} \quad 286. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

$$287. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n} \quad 288. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}} \quad 289. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$$

$$290. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n} \quad 291. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} \quad 292. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!} \quad 293. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$$

$$294. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \quad 295. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}} \quad 296. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n$$

$$297. 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k} + \dots \quad (k \text{ razy})$$

$$298. 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2} + \dots \quad (k \text{ razy})$$

299. Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4} \quad \dots \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{4} \quad \dots$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{4} \quad \dots$$

$$300. \text{ Rozstrzygnąć zbieżność szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}.$$

$$301. \text{ Rozstrzygnąć zbieżność szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}.$$

302. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

W każdym z poniższych 17 zadań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 50, a pierwszy wyraz jest równy 4. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

$$\begin{array}{lll}
 303. \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \dots\dots\dots & 304. \sum_{n=1}^{\infty} (2+a_n) = \dots\dots\dots & 305. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} = \dots\dots\dots \\
 306. \sum_{n=1}^{\infty} (-2a_n) = \dots\dots\dots & 307. \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \dots\dots\dots & 308. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \dots\dots\dots \\
 309. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \dots\dots\dots & 310. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \dots\dots\dots & 311. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \dots\dots\dots \\
 312. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \dots\dots\dots & 313. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots\dots & 314. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{a_n} = \dots\dots\dots \\
 315. \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots & 316. \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \dots\dots\dots & 317. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 9} = \dots\dots\dots \\
 318. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 9} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 9} \right) = \dots\dots\dots & 319. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})}{\sqrt{a_n^2 + 9} + \sqrt{a_{n+1}^2 + 9}} = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

9. KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

10. KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Szeregi potęgowe.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll} 320. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{n^{10}} & 321. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} & 322. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n \cdot x^{2n+5} & 323. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} \\ 324. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n} & 325. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} \cdot x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} & 326. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^n}{(n!)^3} & 327. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} \cdot x^{6n}}{\sqrt{n}} \\ 328. \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{2^n} & 329. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} \cdot x^{n^3} & 330. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^8}{n^{10}+1} \cdot x^{3n} & 331. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^9}{n^{10}+1} \cdot x^{3n} \end{array}$$

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll} 332. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot x^{n+7} & 333. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} \cdot x^n & 334. \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^{n^2} & 335. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} \cdot x^n \\ 336. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (3n)!}{(2n)! \cdot (2n)!} \cdot x^n & & & \end{array}$$

$$337. \text{ Obliczyć sumę szeregu potęgowego } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}.$$

338. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

339. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.