

Kolokwium nr 9: poniedziałek 7.05.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–356.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 24.04.2018 (grupy 2–3).

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina (czyli szeregu Taylora w zerze) funkcji f określonej podanym wzorem

$$\mathbf{340.} \quad f(x) = \sqrt{x+2} \quad \mathbf{341.} \quad f(x) = \frac{1}{x+3} \quad \mathbf{342.} \quad f(x) = \ln(x+e) \quad \mathbf{343.} \quad f(x) = \sqrt[3]{x+27}$$

Jednostajna zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

344. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}, \quad D_f = \mathbb{R}$

345. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad D_f = \mathbb{R}$

346. $f(x) = x^2, \quad D_f = (-1, 2)$

347. $f(x) = x^3, \quad D_f = (-4, 3)$

348. $f(x) = \arctg x, \quad D_f = \mathbb{R}$

349. $f(x) = \arctg \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$

350. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$

351. $f(x) = x^3 - x, \quad D_f = (-1, 1)$

352. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

353. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3+8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

354. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

355. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

356. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin nx + \cos n^2 x}{n^8+88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.