

Kolokwium nr 10: poniedziałek 14.05.2018, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–371.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 8.05.2018 (grupy 2–3).

Szeregi Fouriera

Szeregiem Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

357. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

358. $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

359. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

360. $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$

361. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

362. $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

363. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$

364. $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

365. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$

366. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

367. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

368. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

369. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ stosując wzór Parsevala do $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

370. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$ wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

371. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.