

Egzamin, 1.02.2019, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{33} \cdot n \leq 2^n + 2^{38}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 32$.

Dla $n \leq 32$ zachodzą nierówności

$$2^{33} \cdot n \leq 2^{33} \cdot 32 = 2^{33} \cdot 2^5 = 2^{38} < 2^n + 2^{38},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 33$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 33$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{33} \cdot 33,$$

$$P = 2^{33} + 2^{38} = 2^{33} + 2^5 \cdot 2^{33} = 2^{33} + 32 \cdot 2^{33} = 33 \cdot 2^{33},$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 33$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{33} \cdot n \leq 2^n + 2^{38}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{33} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{38}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 33$ otrzymujemy

$$L = 2^{33} \cdot (n+1) = 2^{33} \cdot n + 2^{33} \leq 2^n + 2^{38} + 2^{33} \leq 2^n + 2^{38} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{38} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 12. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h - \ln(1+h)}{1 - \cos h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \ln(1+h) - A + A \cos h}{h - h \cos h}. \quad (1)$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+h} - A \sin h}{1 - \cos h + h \sin h}. \quad (2)$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - A \cos h}{2 \sin h + h \cos h}. \quad (3)$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2}{(1+h)^3} + \sin h}{3 \cos h - h \sin h} = \frac{-2}{3}. \quad (4)$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = -2/3$.

Zadanie 13. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+7 \cdot (2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}, \quad (5)$$

gdzie

$$N(n) = 2n+7 = 2(B-A)n+B^2-A^2, \quad (6)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (6) muszą być równe.Aby prawa równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2 &= 2 \cdot (B-A) \\ 7 &= B^2-A^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 &= B-A \\ 7 &= (B-A) \cdot (B+A) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7 = A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązywania właściwej części zadania szacujemy sumę (5) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+7} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k} \leq (2n+8) \cdot \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+8) \cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2+\frac{8}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(2n+8) \cdot (n+7)}{(n+3)^2} = \frac{\left(2+\frac{8}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1},$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2 . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 9,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 9 \cdot (1-q) \\ a_1^2 &= 9 \cdot (1-q) \cdot (1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1 = 9 \cdot (1-q)$ do drugiego równania daje

$$81 \cdot (1-q)^2 = 9 \cdot (1-q) \cdot (1+q),$$

skąd po uwzględnieniu $q \neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $9 \cdot (1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$9 - 9q = q + 1,$$

$$q = 4/5, \quad a_1 = 9/5.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 4^{n-1}}{5^n}.$$

Zadanie 15. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.*Rozwiązanie:*

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^{12} + n} + n^6} \cdot \left(\frac{\sqrt{n^4 + n} + n^2}{n} \right)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-5}}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-3}} + 1}{n^{-1}} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + n^{-3}} + 1)^k}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot \frac{n^{-5}}{n^{-k}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + n^{-3}} + 1)^k}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot n^{k-5} = \frac{2^k}{2} = 2^{k-1}, \end{aligned}$$

o ile $k - 5 = 0$, czyli $k = 5$.*Odpowiedź:* Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k = 5$.

Zadanie 16. (10 punktów)

W każdym z zadań **16.1-16.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{16.1.} \quad A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \sqrt{2}$$

$$\sup A = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$\mathbf{16.2.} \quad B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = 2$$

$$\sup B = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$\mathbf{16.3.} \quad C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = 2$$

$$\sup C = \log_3 11$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

$$\mathbf{16.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \sqrt{3}$$

$$\sup D = \log_2 5$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **NIE**

$$\mathbf{16.5.} \quad E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = +\infty$$

$$\sup E = -\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

Zadanie 21. (10 punktów)

W zadaniach **21.1-21.10** funkcja f_k jest określona wzorem $f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x)$. W każdym z tych zadań podaj w **postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

21.1. $f_1''(0) = 2$

21.2. $f_1'''(0) = -3$

21.3. $f_1^{(4)}(0) = 8$

21.4. $f_1^{(5)}(0) = -30$

21.5. $f_2'''(0) = 6$

21.6. $f_2^{(4)}(0) = -12$

21.7. $f_2^{(5)}(0) = 40$

21.8. $f_3^{(4)}(0) = 24$

21.9. $f_3^{(5)}(0) = -60$

21.10. $f_4^{(5)}(0) = 120$

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)}.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A , B i C , że

$$\frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}. \quad (7)$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A \cdot (n+2) \cdot (n+3) + B \cdot n \cdot (n+3) + C \cdot n \cdot (n+2).$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/6$, dla $n=-2$ dostajemy $B=-1/2$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $C=1/3$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/6}{n} - \frac{1/2}{n+2} + \frac{1/3}{n+3} \right) = \\ &= \left(\frac{1/6}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/3}{4} \right) + \left(\frac{1/6}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/3}{5} \right) + \left(\frac{1/6}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/3}{6} \right) + \left(\frac{1/6}{4} - \frac{1/2}{6} + \frac{1/3}{7} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1/6}{N-2} - \frac{1/2}{N} + \frac{1/3}{N+1} \right) + \left(\frac{1/6}{N-1} - \frac{1/2}{N+1} + \frac{1/3}{N+2} \right) + \left(\frac{1/6}{N} - \frac{1/2}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} \right) = \\ &= \frac{1/6}{1} + \frac{1/6}{2} - \frac{1/3}{3} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} = \frac{5}{36} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3}, \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $5/36$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $5/36$.

Zadanie 23. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 2. \quad (8)$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą (w nietrywialnym przypadku $x \neq 0$) do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 125}} \right| = \frac{5 \cdot |x|}{\sqrt{5x^2 + 125}} = \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{x^2}}} \leq \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{10^2}}} = \frac{5}{\sqrt{6,25}} = \frac{5}{2,5} = 2,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 24. (10 punktów)

Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1 , muszą zachodzić warunki

$$W(-1) = -1 \quad \text{oraz} \quad W'(-1) = W''(-1) = 0. \quad (9)$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W'(1) = W''(1) = 0, \quad (10)$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

proceedzi do układu równań

$$\begin{cases} -a + b - c + d - e + g = -1 \\ a + b + c + d + e + g = 1 \\ 5a - 4b + 3c - 2d + e = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d + e = 0 \\ -20a + 12b - 6c + 2d = 0 \\ 20a + 12b + 6c + 2d = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b + d + g = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 6b + d = 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b = d = g = 0$. W konsekwencji układ równań (11) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a + c + e = 1 \\ 5a + 3c + e = 0 \\ 10a + 3c = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a = 3/8$, $c = -5/4$, $e = 15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x) = \frac{3x^5 - 10x^3 + 15x}{8}.$$

Zadanie 25. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

*Rozwiązanie:*Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \arctg x - \ln x$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 \cdot (x - 2) + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2},$$

co na pewno jest dodatnie dla $x > 2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4) < \frac{f(3) + f(5)}{2},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$2f(4) < f(3) + f(5),$$

$$2\arctg 4 - 2\ln 4 < \arctg 3 - \ln 3 + \arctg 5 - \ln 5,$$

$$2\arctg 4 + \ln 3 + \ln 5 < \arctg 3 + \arctg 5 + 2\ln 4.$$

Odpowiedź:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad > \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

Zadanie 26. (10 punktów)Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $x > 1$ spełniających nierówność

$$x^2 > 2^x.$$

Rozwiązanie:

Dane w zadaniu równanie jest równoważne równaniu

$$x^{1/x} > \sqrt{2}.$$

Niech więc $f(x) = x^{1/x}$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\frac{\ln x}{x}} = x^{1/x} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x} = x^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = x^{-2+1/x} \cdot (1 - \ln x).$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$, skąd wynika, że f rośnie w przedziale $[1, e]$ i maleje w przedziale $[e, +\infty)$. Ponieważ przy tym $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$, nierówność $f(x) > \sqrt{2}$ jest równoważna warunkowi $x \in (2, 4)$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej w zadaniu nierówności jest przedział $(2, 4)$.

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n + 3^{2n}}{9^n} + \frac{5^{n+1} + 3^{2n-1}}{9^{n-1} \cdot 25} + \frac{5^{n+2} + 3^{2n-2}}{9^{n-2} \cdot 25^2} + \dots + \frac{5^{n+k} + 3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 25^k} + \dots + \frac{5^{2n} + 3^n}{25^n} \right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5^{n+k} + 3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 25^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{5^{n+k}}{9^{n-k} \cdot 25^k} + \sum_{k=0}^n \frac{3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 25^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{25}\right)^k = \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{9}{5} - 1} + \frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{25} - 1} = \frac{\frac{9}{5} - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{4/5} + \frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1} - 1}{-22/25} \rightarrow \frac{9/5}{4/5} + \frac{-1}{-22/25} = \\ &= \frac{9}{4} + \frac{25}{22} = \frac{99+50}{44} = \frac{149}{44}. \end{aligned}$$

Zadanie 32. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Zatem najmniejsza stała C , z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^{-1/3}}{3 \cdot (1 + 2 \cdot x^{-2})^{2/3}} = 0.$$

Ponadto

$$f''(x) = \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'' :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} &= \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}, \\ 3 \cdot (x^2 + 2) &= 4x^2, \\ 6 &= x^2, \\ x &= \pm\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(\pm\sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot ((\pm\sqrt{6})^2 + 2)^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 8^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C = 1/\sqrt{6}$.

Zadanie 33. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę naturalną k , a następnie udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$xyzt < x^2 + y^3 + z^8 + t^k.$$

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $k=24$ i stosujemy nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do następujących 24 liczb:

- 12 liczb $x^2/12$,
- 8 liczb $y^3/8$,
- 3 liczby $z^8/3$,
- 1 liczba t^{24} .

Otrzymujemy

$$\sqrt[24]{\frac{x^{24}y^{24}z^{24}t^{24}}{12^{12} \cdot 8^8 \cdot 3^3}} \leq \frac{x^2 + y^3 + z^8 + t^{24}}{24},$$

skąd

$$xyzt \leq \frac{\sqrt[24]{12^{12} \cdot 8^8 \cdot 3^3}}{24} \cdot (x^2 + y^3 + z^8 + t^{24}) < x^2 + y^3 + z^8 + t^{24},$$

o ile wykazemy, że

$$\sqrt[24]{12^{12} \cdot 8^8 \cdot 3^3} < 24.$$

Jednak powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$12^{12} \cdot 8^8 \cdot 3^3 < 24^{24},$$

$$2^{48} \cdot 3^{15} < 2^{72} \cdot 3^{24},$$

$$1 < 2^{24} \cdot 3^9,$$

jest więc prawdziwa.

Uwaga

Liczba $k=24$ jest jedyną liczbą rzeczywistą, przy której nierówność podana w zadaniu jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t . Można bowiem wykazać, że k musi spełniać równanie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{k} = 1.$$

Dla dowodu tego faktu należy przyjąć

$$x = s^{1/2}, \quad y = s^{1/3}, \quad z = s^{1/8}, \quad t = s^{1/k},$$

a następnie zbadać, co się dzieje przy $s \rightarrow 0^+$ i przy $s \rightarrow +\infty$.

Zadanie 34. (10 punktów)

Niech $f(x) = 4\cos x + \sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

Punktacja: błędem jest każde opuszczenie poprawnej wartości oraz każde podanie błędnej wartości. Przy b błędach liczba punktów jest równa $\max\left(10 - \binom{b+1}{2}, 0\right)$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{10}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{13\pi}{10}, \quad \frac{17\pi}{10}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$

Zadanie 35. (10 punktów)

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

Punktacja: $\binom{n+1}{2}$ punktów za n poprawnych odpowiedzi.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right) = -2/27$$

$$f''\left(\frac{20}{3}\right) = -1/54$$

$$f''(15) = -6/1331$$

$$f''\left(\frac{88}{3}\right) = -1/729$$

Zadanie 36. (10 punktów lub więcej)

Na potrzeby tego zadania powiemy, że funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ jest *cudowna*, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(f'(x))^2 = f(x)$. Na przykład funkcja określona wzorem $f(x) = x^2/4$ jest cudowna.

a) (10 punktów) Podać przykład cudownej funkcji f spełniającej warunek $f(1) = 1$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

b) (dodatkowe punkty) Podać przykład cudownej funkcji f spełniającej warunek $f(-10) = f(10) = 1$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+8)^2}{4} & \text{dla } x \in (-\infty, -8], \\ 0 & \text{dla } x \in (-8, 8), \\ \frac{(x-8)^2}{4} & \text{dla } x \in [8, +\infty). \end{cases}$$