

Egzamin, 1.02.2019, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{33} \cdot n \leq 2^n + 2^{38}.$$

Zadanie 12. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Zadanie 13. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9.$$

Zadanie 15. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n} - n^6}{\left(\sqrt{n^4+n} - n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Zadanie 16. (10 punktów)

W każdym z zadań **16.1-16.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{16.1.} \quad A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{16.2.} \quad B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{16.3.} \quad C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{16.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{16.5.} \quad E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie **21.** (10 punktów)

W zadaniach **21.1-21.10** funkcja f_k jest określona wzorem $f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x)$. W każdym z tych zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$21.1. f_1''(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.2. f_1'''(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.3. f_1^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.4. f_1^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.5. f_2'''(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.6. f_2^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.7. f_2^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.8. f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.9. f_3^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$$

$$21.10. f_4^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$$

Zadanie 22. (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)}.$$

Zadanie 23. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

Zadanie 24. (10 punktów)

Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Zadanie 25. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

Zadanie 26. (10 punktów)Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $x > 1$ spełniających nierówność

$$x^2 > 2^x.$$

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n + 3^{2n}}{9^n} + \frac{5^{n+1} + 3^{2n-1}}{9^{n-1} \cdot 25} + \frac{5^{n+2} + 3^{2n-2}}{9^{n-2} \cdot 25^2} + \dots + \frac{5^{n+k} + 3^{2n-k}}{9^{n-k} \cdot 25^k} + \dots + \frac{5^{2n} + 3^n}{25^n} \right).$$

Zadanie 32. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

Zadanie 33. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę naturalną k , a następnie udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$xyzt < x^2 + y^3 + z^8 + t^k.$$

Zadanie 34. (10 punktów)

Niech $f(x) = 4\cos x + \sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

Punktacja: błędem jest każde opuszczenie poprawnej wartości oraz każde podanie błędnej wartości. Przy b błędach liczba punktów jest równa $\max\left(10 - \binom{b+1}{2}, 0\right)$.

Zadanie 35. (10 punktów)

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

Punktacja: $\binom{n+1}{2}$ punktów za n poprawnych odpowiedzi.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right) = \dots\dots\dots$$

$$f''\left(\frac{20}{3}\right) = \dots\dots\dots$$

$$f''(15) = \dots\dots\dots$$

$$f''\left(\frac{88}{3}\right) = \dots\dots\dots$$

Zadanie 36. (10 punktów lub więcej)

Na potrzeby tego zadania powiemy, że funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ jest *cudowna*, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(f'(x))^2 = f(x)$. Na przykład funkcja określona wzorem $f(x) = x^2/4$ jest cudowna.

a) (10 punktów) Podać przykład cudownej funkcji f spełniającej warunek $f(1) = 1$.

b) (dodatkowe punkty) Podać przykład cudownej funkcji f spełniającej warunek $f(-10) = f(10) = 1$.