

Egzamin, 16.02.2019, godz. 10:00-13:40**Zadanie 1. (10 punktów)**

W każdym z zadań **1.1–1.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$1.1. A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = -1/11$$

$$\sup A = 1/4$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$1.2. B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = -1/6$$

$$\sup B = 1/11$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$1.3. C = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = 2$$

$$\sup C = 12/5$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

$$1.4. D = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = -4$$

$$\sup D = -12/5$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **NIE**

$$1.5. E = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = -2$$

$$\sup E = 0$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

Zadanie 2. (10 punktów)

W każdym z zadań **2.1–2.10** podaj granicę funkcji.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}((2 - \sqrt{3}) \cdot x) = \pi/2$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}((2 - \sqrt{5}) \cdot x) = -\pi/2$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^x} = 1$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^{3^x}} = 3$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{3^{3^{3^x}}} = 27$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3^{2^{3^x}}} = 8$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{3^{2^x}}} = 9$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4^{3^{4^x}}} = 81$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{3^{4^x}}} = 64$$

Zadanie 3. (10 punktów)

W każdym z zadań **3.1–3.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = a|x| + bx$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

$$3.1. a = 4, \quad b = -\sqrt{17}$$

$$3.2. a = -4, \quad b = -\sqrt{17}$$

$$3.3. a = 5, \quad b = -\sqrt{26}$$

$$3.4. a = -5, \quad b = -\sqrt{26}$$

$$3.5. a = 6, \quad b = -\sqrt{37}$$

$$3.6. a = -6, \quad b = -\sqrt{37}$$

$$3.7. a = 7, \quad b = -\sqrt{50}$$

$$3.8. a = -7, \quad b = -\sqrt{50}$$

$$3.9. a = 8, \quad b = -\sqrt{65}$$

$$3.10. a = -8, \quad b = -\sqrt{65}$$

Zadanie 4. (10 punktów)

W każdym z zadań **4.1–4.3** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**. Za komplet poprawnych odpowiedzi otrzymasz **dziesiąty punkt**.

$$4.1. f_1(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'_1(1) = 1/3 \quad f'_1(8) = 1/12 \quad f'_1(27) = 1/27$$

$$4.2. f_2(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad f'_2(1) = -1/2 \quad f'_2(2) = -8/125 \quad f'_2(3) = -3/250$$

$$4.3. f_3(x) = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2 \quad f'_3(1) = 1 \quad f'_3(2) = 4/5 \quad f'_3(3) = 3/5$$

Zadanie 5. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-3, 4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2 = \sqrt{(4x+1)^2} - x^2 = |4x+1| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1-x^2 & \text{dla } x \in [-1/4, 4] \\ -4x-1-x^2 & \text{dla } x \in [-3, -1/4] \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 4]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{dla } x \in (-1/4, 4) \\ -4-2x & \text{dla } x \in (-3, -1/4) \end{cases}$$

W punkcie $-1/4$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/4, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/4, 4)$.

2° W przypadku $x \in (-3, -1/4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-2$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 4 ,
- miejsca zerowe pochodnej: -2 i 2 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/4$.

$$f(-3) = 2,$$

$$f(-2) = 3,$$

$$f(-1/4) = -1/16,$$

$$f(2) = 5,$$

$$f(4) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/16$ w punkcie $-1/4$, a wartość największą równą 5 w punkcie 2 .

Zadanie 6. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sqrt{1+h} - A \cdot \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}. \quad (1)$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{2\sqrt{1+h}} - \frac{A}{1+h}}{\ln(1+h) + \frac{h}{1+h}}. \quad (2)$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \frac{1}{4(1+h)^{3/2}} + \frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h} + \frac{1}{(1+h)^2}} = \frac{7}{8}. \quad (3)$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1/2$ i wówczas $f'(0) = 7/8$.

Zadanie 7. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 \leq 10C.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 = \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} & \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6} \geq \\ & \geq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^8})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^8})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^8} + n^6} = \\ & = \frac{80n^6}{27n^6 + 9n^6 + 3n^6 + n^6} = \frac{80n^6}{40n^6} = 2 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6} \leq \\ & \leq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 0})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 0})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 0} + n^6} = \frac{80n^6}{4n^6} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Sposób II

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia jak w sposobie I przepisujemy je w postaci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6} = \\ &= \frac{80}{\left(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n^2}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[4]{1 + \frac{80}{n^2}} + 1}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Sposób III

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 = \frac{\sqrt{n^8 + 80n^6} - n^4}{\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^2} = \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 80n^6} + n^4)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 80n^6} + n^4)} &\geq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^8} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 80n^8} + n^4)} = \\ &= \frac{80n^6}{4n^2 \cdot 10n^4} = \frac{80n^6}{40n^6} = 2 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} &\frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 80n^6} + n^4)} \leq \\ &\leq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 0} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 0} + n^4)} = \frac{80n^6}{2n^2 \cdot 2n^4} = \frac{80n^6}{4n^6} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Sposób IV

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia jak w sposobie III przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 80n^6} + n^4)} = \frac{80}{(\sqrt[4]{1 + \frac{80}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + \frac{80}{n^2}} + 1)}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Zadanie 8. (10 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{2700} 9000 &= \frac{m}{n}, \\ 2700^{m/n} &= 9000, \\ 2700^m &= 9000^n.\end{aligned}\tag{4}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^{3m} \cdot 5^{2m} = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{3n}.\tag{5}$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 3m = 2n \\ 2m = 3n \end{cases}\tag{6}$$

Jednak układ równań (6) nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 3m > 2m,$$

czyli $2m > 2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest niewymierna.

Zadanie 9. (10 punktów)

Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0, +\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ x^{1/3} &< 2, \\ x &< 8. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 8]$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{7}$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x, y \leq 8$.

W szczególności

$$f(6) + f(8) < 2 \cdot f(7).$$

Zadanie 10. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 1$ oraz $P = 1$, skąd $L = P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = P,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \quad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\heartsuit)$ prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{2(n+2)},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{(n+2) - n}{2n(n+2)},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+2)},$$

$$n(n+2) \leq (n+1)^2,$$

$$n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1,$$

$$0 \leq 1,$$

a zatem nierówność $(\heartsuit)$ jest prawdziwa dla każdej liczby n .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .